常 用 符 号

符号	含义
$\langle f, g\rangle$	内积
$\Vert f\Vert$	范数
$x<+\infty$	x 为有限数
$\bar{Z}$	$Z\in \mathbf{C}$ 的复共轭
$\lfloor x\rfloor$	满足 $n\leqslant x$ 的最大整数 n
$\lceil x\rceil$	满足 $n\geqslant x$ 的最小整数 n
$\mathbf{N}$	非负整数集
$\mathbf{Z}$	整数集
$\mathbf{R}$	实数集
$\mathbf{R}^+$	正实数集
$\mathbf{C}$	复数集
$f(t)$	连续函数或连续的时间信号
$f[n]$	离散信号
$\delta(t)$	Dirac 广义函数
$\delta[n]$	离散 Dirac 广义函数
$C^p_{[a,b]}$	$[a,b]$ 上 p 次连续可微函数空间
$L^2(\mathbf{R})$	满足 $\int_{\mathbf{R}} \vert f(t)\vert^2 \mathrm{d}t<+\infty$ 的函数空间
$L^p(\mathbf{R})$	满足 $\int_{\mathbf{R}} \vert f(t)\vert^p \mathrm{d}t<+\infty$ 的函数空间
l^2	平方可和序列的集合，即 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \vert c_n\vert^2<+\infty$
$\nabla f(x)$	多元函数 $f(x)$ 的梯度
$f*g(x)$	函数 $f(t)$ 与 $g(t)$ 的卷积
$f*g[n]$	离散信号卷积
$\hat{f}(\omega)$	$f(t)$ 的 Fourier 变换
$(Wf)(a,b)$	$f(t)$ 的小波变换

目　　录

第1章 数学预备知识

小波分析是在 Fourier 分析基础上发展起来的对函数(信号)的一种新的分析工具,同时它又是一种新的数值分析方法。泛函分析是它重要的数学基础。

泛函分析吸取了各个数学分支中最基本的精华,具有高度的抽象性、系统性与普遍性,它的观点、方法和规律可以广泛地应用到各个学科。

为以后的学习方便,本章简要介绍一些有关的基础知识。

1.1 距离空间

定义 1.1 设 X 是一非空集合,对于任意 $x,y\in X$,都有一个实数 $\rho(x,y)$ 与其对应,且 $\rho(x,y)$ 满足以下三公理(称为距离公理):

(1) 非负性:$\rho(x,y)\geqslant 0$,当且仅当 $x=y$ 时,有 $\rho(x,y)=0$;

(2) 对称性:$\rho(x,y)=\rho(y,x)$;

(3) 三角不等式:对任何 $x,y,z\in X$,有

$$\rho(x,y)\leqslant \rho(x,z)+\rho(y,z)$$

则称 $\rho(x,y)$ 为 x,y 之间的距离,称 X 为距离空间。

上述定义是通常欧氏距离概念的抽象与推广。

例 1.1 n 维欧氏空间。设 $\mathbf{R}^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in\mathbf{R},i=1,\cdots,n\}$,对于任意 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n),\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n$,定义

$$\rho(x,y)=\Big[\sum_i(x_i-y_i)^2\Big]^{1/2} \tag{1.1}$$

可以证明上述定义满足距离公理,所以它是 $\mathbf{R}^n$ 上的距离,而 $\mathbf{R}^n$ 是一个距离空间。

同样在 $\mathbf{R}^n$ 中可以定义另一种距离:

$$\rho_1(x,y)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\mid x_i-y_i\mid \tag{1.2}$$

从而可得另一个距离空间。

式(1.1)定义的距离称为欧氏距离,而 $\mathbf{R}^n$ 称为 Euclid 空间。

例 1.2 连续函数空间。设 $C_{[a,b]}=\{f(x)\mid f$ 是$[a,b]$上的连续函数$\}$,对任何的 $f(x)$,

$g(x) \in C_{[a,b]}$，定义

$$\rho(f,g) = \max_{a \leqslant x \leqslant b} | f(x) - g(x) | \tag{1.3}$$

可以证明，如此定义的 $\rho(f,g)$ 满足距离公理，因此 $C_{[a,b]}$ 是一个距离空间，称为连续函数空间。

例 1.3 平方可积函数空间。设

$$L^2(\mathbf{R}) = \{f(x): \int_{\mathbf{R}} |f(x)|^2 \mathrm{d}x < +\infty\}$$

在 $L^2(\mathbf{R})$ 上对于任意 $f(x), g(x) \in L^2(\mathbf{R})$，定义

$$\rho(f,g) = [\int_{\mathbf{R}} |f(x) - g(x)|^2 \mathrm{d}x]^{1/2} \tag{1.4}$$

可以证明，$L^2(\mathbf{R})$ 构成一距离空间，称之为平方可积函数空间。

例 1.4 设 l^2 表示满足 $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$ 的数列全体，则对任意的 $x = (x_1, x_2, \cdots), y = (y_1, y_2, \cdots) \in l^2$，定义

$$\rho(x,y) = \left[\sum_i |x_i - y_i|^2\right]^{1/2} \tag{1.5}$$

可以证明，l^2 构成一距离空间，称为平方可和的数列空间。

1.2 函数空间

1.2.1 线性空间

定义 1.2 设 X 为一非空集合，K 为数域（实数域或复数域）。如果在 X 中定义了“加法”和“数乘”，并且这两种运算满足封闭性及如下的运算律：

关于“加法”，有

(1) 交换律：$x + y = y + x$，

(2) 结合律：$x + (y + z) = (x + y) + z$，

(3) 存在“零元素”θ，使 $x + \theta = x$，

(4) 存在“逆元素”$-x$，使 $x + (-x) = \theta$；

关于“数乘”，有

(1) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$，　$\alpha, \beta \in K$，

(2) $1 \cdot x = x$，　$0 \cdot x = \theta$，

(3) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$，

(4) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$；

则称 X 为实（或复）线性空间。

1.2.2　赋范线性空间

定义 1.3　设 X 为线性空间(实数或复数)，若对任意的 $x \in X$，有一个非负实数 $\| x \|$ 与之对应，且满足(范数公理)

(1) $\| x \| \geqslant 0, \| x \| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$(非负性)；

(2) $\| \alpha x \| = | \alpha | \cdot \| x \|, \alpha \in \mathbf{R}$(齐次性)；

(3) $\| x + y \| \leqslant \| x \| + \| y \|, \quad x, y \in X$(三角不等式)；

则称 $\| x \|$ 为 x 的范数，X 为赋范线性空间。

通过比较范数公理与距离公理可以发现，在赋范线性空间中，任何两点(元素)x, y 的距离可由范数导出：

$$\rho(x, y) = \| x - y \|$$

此时，线性赋范空间也是距离空间。但距离空间不一定是线性赋范空间。这从距离空间定义可以知道，因为在那里仅要求 X 是非空集合。

例 1.5　在 $\mathbf{R}^n$ 中，常用以下范数：

$$\| x \|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} | x_i |^2 \right)^{1/2}$$

$$\| x \|_1 = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} | x_i |$$

例 1.6　在 $C_{[a,b]}$ 中常用以下范数：

$$\| f \| = \max_{a \leqslant x \leqslant b} | f(x) |$$

例 1.7　在 $L^2(\mathbf{R})$ 中常用以下范数：

$$\| f \|_2 = \left(\int_{\mathbf{R}} | f(x) |^2 \mathrm{d}x \right)^{1/2}$$

例 1.8　在 l^2 中常用以下范数：

$$\| x \|_2 = \left(\sum_{i=1}^{\infty} | x_i |^2 \right)^{1/2}$$

1.2.3　Banach 空间

定义 1.4　设 X 是一线性赋范空间，若 X 中的任何 Cauchy 序列 $\{x_i\}$ 都有极限，且极限在 X 中，则称 X 为 Banach 空间。

所谓 Cauchy 序列，是指序列 $\{x_n\}$，当 $m, n \to \infty$ 时，有 $\| x_n - x_m \| \to 0$。

上述极限实际上是按范数收敛，即在线性赋范空间中，若 $\min\limits_{n \to \infty} \| x_n - x \| = 0$，则称序列 $\{x_n\}$ 按范数收敛于 x(或称为强收敛)。

定义 1.4 中的 Cauchy 序列按范数收敛于 X 内的一点，此时称 X 是按范数完备的线性赋范空间。完备的赋范线性空间称为 Banach 空间。

1.2.4 Hilbert 空间

定义 1.5 设 X 是实数或复数域上的线性空间，如果对 X 中的任何两个元素 f,g，都有唯一的数 $\langle f,g\rangle$ 与之对应，且满足

(1) 共轭对称性：$\langle f,g\rangle = \overline{\langle g,f\rangle}$；

(2) 线性：$\langle \alpha f+\beta g,h\rangle = \alpha\langle f,h\rangle + \beta\langle g,h\rangle,\quad \alpha,\beta\in\mathbf{C}$；

(3) 非负性：$\langle f,f\rangle \geqslant 0$，且 $\langle f,f\rangle = 0 \Leftrightarrow f=\theta$，

则称 $\langle f,g\rangle$ 为 f 与 g 的内积，称 X 为内积空间。

在内积空间，由内积可以导出范数

$$\| f\| = \sqrt{\langle f,f\rangle} \tag{1.6}$$

它满足范数公理(1)，(2)，(3)。

关于内积和范数之间还有以下三个公式：

Cauchy - Schwarz 不等式：

$$|\langle x,y\rangle|^2 \leqslant \| x\|^2 \| y\|^2 \tag{1.7}$$

式中，$\|\cdot\|$ 由式(1.6) 确定。

平行四边形公式：

$$\| x+y\|^2 + \| x-y\|^2 = 2(\| x\|^2 + \| y\|^2) \tag{1.8}$$

式中，$\|\cdot\|$ 由式(1.6) 给出。

极化恒等式：

当范数满足平行四边形公式时，由范数可以表示内积

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}(\| x+y\|^2 - \| x-y\|^2) + \frac{i}{4}(\| x+iy\|^2 - \| x-iy\|^2) \tag{1.9}$$

特别地，在实空间有

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}(\| x+y\|^2 - \| x-y\|^2) \tag{1.10}$$

可以证明，上面给出的内积 $\langle x,y\rangle$ 满足内积公理。

定义 1.6 若内积空间 X 按范数 $\| x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ 是完备的，则称 X 是 Hilbert 空间，简记为 H 空间。

Hilbert 空间是 Euclid 空间的自然推广。

例 1.9 (1) 在线性空间 $L^2(\mathbf{R})$ 中，定义内积为

$$\langle f,g\rangle = \int_{\mathbf{R}} f(x)\,\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x \qquad f,g\in L^2(\mathbf{R}) \tag{1.11}$$

由内积导出的范数

$$\| f\| = \left[\int_{\mathbf{R}} |f(x)|^2 \mathrm{d}x\right]^{1/2} \tag{1.12}$$

可以证明，$L^2(\mathbf{R})$ 按此范数是完备的，因此 $L^2(\mathbf{R})$ 是 Hilbert 空间。

(2) 在 l^2 中，定义内积为

$$\langle c,d\rangle = \sum_n c_n \overline{d}_n,\quad \{c_n\},\{d_n\} \in l^2 \tag{1.13}$$

由它导出的范数是

$$\| c \| = \Big[\sum_n |c_n|^2\Big]^{1/2} \tag{1.14}$$

1.2.5　正交分解与最佳逼近

在内积空间中，任意两个元素 $x,\ y$ 是正交的，由它们的内积 $\langle x,\ y\rangle = 0$ 来定义，这与解析几何中的情形一样。x 与 y 正交，记为 $x \perp y$。

定义 1.7　设 M,N 是某内积空间的两个子空间，若对 $\forall x \in M, \forall y \in N$，恒有 $x \perp y$，则称 M 与 N 正交，记为 $M \perp N$。

在 Euclid 空间 $\mathbf{R}^3$ 中，定义内积为两个向量的点积。空间点 $\boldsymbol{x}$ 到平面(如 XOY 面) 的投影 $\boldsymbol{x}_0$ 满足$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0) \perp M$，于是有 $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{x}_0$。若记 $\mathbf{R}^3$ 中与 M 正交的所有元素全体为 $M^\perp$，称 $M^\perp$ 为 M 的正交补。显然$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0) \in M^\perp, \boldsymbol{x}_0 \in M$，若记 $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0$，则有

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_0 \tag{1.15}$$

式(1.15) 称为向量 $\boldsymbol{x}$ 的正交分解。此外正交投影还具有如下性质：

$$\| \boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0 \| = \inf_{y\in M} \| \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y} \| \tag{1.16}$$

上述情形可以推广到 Hilbert 空间，由于 Hilbert 空间是一种完备的内积空间，H 中的任意两个元素的正交性、两个子空间的正交性及任意元素 x 的正交分解，与前述情形完全一样。

定理 1.1　(投影定理)　设 M 是 H 空间中的闭子空间，则对 $\forall x \in H$，M 中必存在唯一的 x_0(称为 x 在 M 上的投影) 及唯一的 $x_1 \in M^\perp$，使

$$x = x_0 + x_1 \tag{1.17}$$

(证明见泛函分析教材)x 的表示式(1.17) 是唯一的，该定理也称为正交分解定理。

定理 1.2　(最佳逼近定理)　设 M 是 H 空间中的闭子空间，则对 $\forall x \in H$，M 中必存在唯一的 x_0(称为对 x 的最佳逼近元)，使得

$$\| x-x_0 \| = \inf_{y\in M} \| x-y \| \tag{1.18}$$

定理 1.3　设 M 是 H 空间的闭子空间，$x \in H$，如果 M 中的某个 x_0 为 x 的最佳逼近元，则充分必要条件为

$$(x-x_0) \perp M$$

这三个定理都不给出证明过程。需说明的是，前两个定理无论在理论上还是应用上都是很重要的。综合三个定理可以得出如下结论：对 H 中的任一元素 x，M 中对 x 的最佳逼近元就是 x 在 M 上的投影。

1.2.6 $L^2(\mathbf{R})$ 中的投影与逼近

由例 1.9 可知,$L^2(\mathbf{R})$ 是典型的 Hilbert 空间,因此把 1.2.5 中所叙述的内容在 $L^2(\mathbf{R})$ 中进一步描述。

定义 1.8 在 $L^2(\mathbf{R})$ 中,设 $\{\varphi_1,\varphi_2,\cdots\}$ 是一组非零元素,如果对于其中任何两个 φ_i,φ_j $(i\neq j)$,都有 $\langle\varphi_i,\varphi_j\rangle=0$,则称 $\{\varphi_i\}_{i=1}^{+\infty}$ 为正交系。

定义 1.9 设 $\{\varphi_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 中的正交系,如果每个 φ_i 的范数都为 1,则称其为规范正交系(或标准正交系)。即 $\{\varphi_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ 为规范正交系,充要条件是

$$\langle\varphi_i,\varphi_j\rangle=\delta_{ij}$$

式中

$$\delta_{ij}=\begin{cases}0, & i\neq j\\ 1, & i=j\end{cases}$$

例 1.10 在 $L^2(-\pi,\pi)$ 中,内积定义为

$$\langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,\overline{g}(t)\mathrm{d}t$$

则三角函数系

$$\frac{1}{\sqrt{2}},\cos t,\sin t,\cos 2t,\sin 2t,\cdots$$

是规范正交系。

研究无限维空间 $L^2(\mathbf{R})$ 中的元素在有限维子空间上的投影与逼近,在实际应用中是很重要的。因为在实际中,无限维空间中的问题基本上都是通过有限维空间近似进行的,所以,在有限维空间寻求最佳逼近元的方法具有重要意义。

定理 1.4 (最佳逼近定理) 设 M 是 $L^2(\mathbf{R})$ 中的有限维子空间,$\{\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n\}$ 为 M 的规范正交基,$x\in L^2(\mathbf{R})$,则对任何一组数 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,恒有

$$\left\| x-\sum_{k=1}^{n}\langle x,\varphi_k\rangle\varphi_k\right\| \leqslant \left\| x-\sum_{k=1}^{n}a_k\varphi_k\right\| \tag{1.19}$$

证明 由定理条件可知,M 由 $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ 张成

$$M=\mathrm{span}\{\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n\}$$

利用定理 1.1 和定理 1.2,对 $\forall x\in L^2(\mathbf{R})$,$M$ 中必存在唯一元素,即 x 在 M 中的投影 x_0,使得式(1.18) 成立,即

$$\| x-x_0\| \leqslant \| x-y\|,\quad \forall y\in M \tag{1.20}$$

由于 $\{\varphi_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ 是 M 的规范正交基,因此

$$x_0=\sum_{i=1}^{n}c_i\varphi_i \tag{1.21}$$

由前面讨论可知,$(x-x_0)\perp M$,即 $\langle x-x_0,\varphi_j\rangle=0,j=1,2,\cdots,n$。将式(1.21) 代入,有

$$\langle x - \sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i, \varphi_j \rangle = 0, \qquad j = 1,2,\cdots,n$$

由上式可知

$$\langle x, \varphi_j \rangle = \langle \sum_i c_i\varphi_i, \varphi_j \rangle = c_j, \qquad j = 1,2,\cdots,n$$

将 c_j 代入式(1.21),有

$$x_0 = \sum_{k=1}^{n} \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k$$

再将 $y \in M$ 写成 $y = \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k$,将 y 及上面 x_0 的表达式代入式(1.20),即证得式(1.19)成立。

下面讨论用 $L^2(\mathbf{R})$ 中有限维子空间 M 逼近 $L^2(\mathbf{R})$ 时最佳逼近元的计算方法。设 M 的基为 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$,最佳逼近元的一般提法是,对任一 $x \in L^2(\mathbf{R})$,要求出一组数 α_1, $\alpha_2, \cdots, \alpha_n$,使得

$$\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \| \leqslant \| x - \sum_{k=1}^{n} c_k x_k \| \tag{1.22}$$

式中,$\{c_k\}_{k=1}^{n}$ 为任意一组数。

设 x 在 M 中的最佳逼近元为 $x_0 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$,由定理 1.3,有 $(x - x_0) \perp M$,或写成

$$\langle x - x_0, x_i \rangle = 0, \qquad i = 1,2,\cdots,n \tag{1.23}$$

即

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \langle x_k, x_i \rangle = \langle x, x_i \rangle, \qquad i = 1,2,\cdots,n \tag{1.24}$$

方程组式(1.24)的系数矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \langle x_1, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_1, x_n \rangle \\ \langle x_2, x_1 \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_2, x_n \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle x_n, x_1 \rangle & \langle x_n, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_n, x_n \rangle \end{bmatrix} \tag{1.25}$$

称 $\mathbf{A}$ 为 Gram 矩阵。由于 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 线性无关,$\det\mathbf{A} \neq 0$,则方程组的唯一解 α_1, $\alpha_2, \cdots, \alpha_n$,可保证 $y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$ 是对 x 的最佳逼近元。

在上面的讨论中,由于基函数的取法具有任意性,因此当 M 的维数 n 较大时,Gram 矩阵的行列式计算量过大。当基函数取为规范正交基时,Gram 矩阵成为单位矩阵,计算量大大减少。此时方程组式(1.24)的解是

$$\alpha_i = \langle x, x_i \rangle, \qquad i = 1,2,\cdots,n \tag{1.26}$$

1.3 线性算子与线性泛函

本节简单介绍算子与泛函的概念。

算子就是映射。它是普通函数定义中的数集到数集映射概念的推广。通常把线性赋范空间 X 到线性赋范空间 Y 的映射称为算子，用 T 表示（也常用 A 表示）。T 的定义域和值域分别表示为 $D(T)$ 和 $N(T)$。

1.3.1 线性算子

定义 1.7 设 X, X_1 都是赋范线性空间，$T: D(T) \to N(T), D(T) \subset X, N(T) \subset X_1$，如果对任意的 $x, y \in D(T), \alpha \in \mathbf{C}$，都有

$$\left.\begin{aligned} T(x+y) &= Tx + Ty \\ T(\alpha x) &= \alpha Tx \end{aligned}\right\} \tag{1.27}$$

则称 T 为线性算子。例如微分算子、积分算子、由矩阵定义的线性变换等。

对于线性算子 T，如果存在正数 M，使得对于 $\forall x \in D(T)$，有

$$\| Tx \| \leqslant M \| x \| \tag{1.28}$$

则称 T 为有界线性算子。

如果对任意的 $x_n, x \in D(T)$，当 $x_n \to x$ 时，有

$$Tx_n \to Tx, \qquad n \to +\infty$$

则称 T 为连续算子。

1.3.2 线性泛函

线性泛函是一种特定的算子，即当线性算子 T 的值域为数域时，该算子称为线性泛函，泛函一般用 f, g, h 等表示。类似算子，泛函有连续泛函、有界泛函等。

例 1.11 对于任意的 $x(t) \in C_{[a,b]}$，

$$f(x) = \int_a^b x(t)\mathrm{d}t$$

是 $C_{[a,b]}$ 上的线性泛函。

例 1.12 设 $C^1_{[a,b]}$ 是 $[a,b]$ 上连续可微函数全体构成的赋范线性空间，对任意 $x(t) \in C^1_{[a,b]}$

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t_0), \qquad t_0 \in [a,b]$$

为 $C^1_{[a,b]}$ 上的线性泛函。

1.4 Fourier 级数与 Fourier 积分

1.4.1 Fourier 级数的复指数形式

从数学分析中知道，一个以 T 为周期的函数 $f(t)$，若在区间 $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ 上满足狄氏条件(即连续或只有有限个第 1 类间断点和只有有限个极值点)，则

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t),\ t\text{ 为 }f(t)\text{ 的连续点} \tag{1.29}$$

式中

$$\omega=\frac{2\pi}{T} \tag{1.30}$$

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\mathrm{d}t \tag{1.31}$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos n\omega t\,\mathrm{d}t \qquad n=1,2,\cdots \tag{1.32}$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\sin n\omega t\,\mathrm{d}t \qquad n=1,2,\cdots \tag{1.33}$$

式(1.29) 表明，周期为 T 的函数在满足狄氏条件后，就可以由函数系

$$\{1,\sin\omega t,\cos\omega t,\sin 2\omega t,\cos 2\omega t,\cdots\} \tag{1.34}$$

表示。在函数空间 $C_{[a,b]}$ 上定义内积

$$\langle x,y\rangle=\int_b^a x(t)\bar{y}(t)\mathrm{d}t$$

后，就可以验证函数系式(1.34) 中任意两个函数的内积，例如

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin m\omega t\ \cos n\omega t\,\mathrm{d}t=0$$

因此，函数系式(1.34) 是正交函数系，它构成了相应函数空间的正交基，式(1.29) 是唯一的。

为了应用方便，式(1.29) 常化为复指数形式。利用 Euler 公式

$$\cos t=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2} \qquad \sin t=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}}$$

可将式(1.29) 化成复指数形式的 Fourier 级数，即

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t} \tag{1.35}$$

式中

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega t}\mathrm{d}t \tag{1.36}$$

式(1.35)说明，周期函数 $f(t)$ 被表示成许多不同频率的谐波（正弦波）分量的叠加，c_n 就是反映频率为 $n\omega = n\frac{2\pi}{T}$ 的谐波成分。c_n 称为 $f(t)$ 的离散频谱，$|c_n|$ 为离散振幅频谱，$\arg c_n$ 为离散相位谱。此外式(1.35)还说明，$f(t)$ 可以与 Fourier 序列

$$\{\cdots, c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2, \cdots\}$$

一一对应。这样就可以把分析函数 $f(t)$ 转化为分析系数序列。

1.4.2 Fourier 变换

对于一个非周期函数 $f(t)$，是否能像 1.4.1 那样表示成不同频率的谐波叠加呢？

设 $f(t)$ 为非周期函数，如果它在任何有限区间上满足狄氏条件，且绝对可积，即 $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x<+\infty$，此时可以把 $f(t)$ 看做周期 T 无限增大的周期函数，利用式(1.35)和式(1.36)，且令 $\omega = \Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$，有

$$\begin{aligned} f(t) = \lim_{T\to+\infty} f_T(t) &= \lim_{T\to+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t} = \\ &\frac{1}{2\pi}\lim_{\Delta\omega\to 0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\left(\int_{-\frac{\pi}{\Delta\omega}}^{+\frac{\pi}{\Delta\omega}} f_T(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\Delta\omega x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\Delta\omega t}\right]\Delta\omega = \\ &\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega \end{aligned} \tag{1.37}$$

式(1.37)称为 Fourier 积分公式。当 $f(t)$ 在 $t = t_0$ 处间断时，取

$$f(t) = \frac{f(t_0+0)+f(t_0-0)}{2}$$

记

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \tag{1.38}$$

则式(1.37)成为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{1.39}$$

定义 1.8 称式(1.38)为 $f(t)$ 的 Fourier 变换，记为 $F(\omega)$ 或 $\hat{f}(\omega)$。

从式(1.38)和式(1.39)可以看出，$f(t)$ 和 $\hat{f}(\omega)$ 可以用积分运算相互表示。式(1.38)将以时域（或空间）变量 $t\in(-\infty,+\infty)$ 为自变量的函数 $f(t)$ 化为以频率 ω 为自变量的

函数 $\hat{f}(\omega)$，$\omega \in (-\infty, +\infty)$；而式(1.39)则将以频域变量 ω 为自变量的函数 $\hat{f}$ 化成原来的时域函数 $f(t)$。两公式具有优美的对称形式，且 $f(t)$ 与 $\hat{f}(\omega)$ 是一一对应的(注意，$f(t)$ 应满足前述条件)，或 Fourier 变换是 **R** 到 **R** 的一一映射。

比较式(1.35)与式(1.39)可知，非周期函数 $f(t)$ 也是由许多不同频率的谐波分量 $e^{i\omega t}$ 合成的。两者不同的是，周期函数的谐波分量的频率是离散的，而非周期函数的谐波分量的频率 ω 是连续分布的。

对于非周期函数 $f(t)$，它的 Fourier 变换 $F(\omega)$ 又称为频谱函数，其模 $|F(\omega)|$ 称为 $f(t)$ 的振幅频谱。$F(\omega)$ 的图形叫做 $f(t)$ 的频谱图，它描述了在频率 ω 处的振荡信息，使得信号 $f(t)$ 的频率特征一目了然。对一个函数 $f(t)$ 作 Fourier 变换以后，能得到 $f(t)$ 在频域的信息，这样就可以在频域中研究信号的特征，但此时 $f(t)$ 在时域的信息将完全丢失，因而不能同时对信号进行时频分析，这是 Fourier 变换的不足之处。

例 1.13　求函数(矩形波)

$$f(t) = \begin{cases} A, & |t| \leqslant \dfrac{T}{2} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

的 Fourier 变换，并作出频谱图。

解　由 Fourier 变换定义，有

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A e^{-i\omega t} dt = 2A \frac{\sin \frac{T\omega}{2}}{\omega}$$

频谱图如图 1.1 所示。

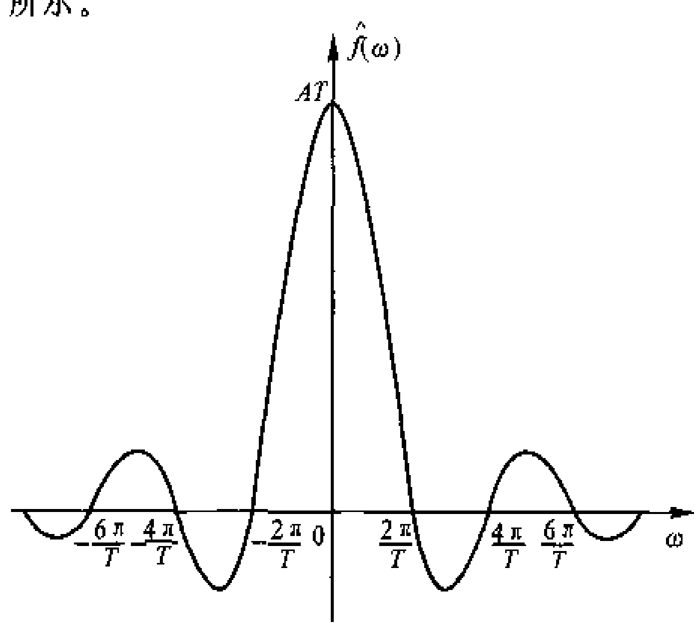


图 1.1　矩形波函数的频谱图

1.4.3 Fourier 变换的性质

下面列出 Fourier 变换的一些常用性质，不给出证明。$[\cdot]^\wedge$ 表示对[ ]中的函数作 Fourier 变换(假设 $f,g \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$)。

(1) 对称性

$$[f(-\omega)]^\wedge = \hat{f}(-t) \tag{1.40}$$

$$[\hat{f}(t)]^\wedge = 2\pi f(-\omega) \tag{1.41}$$

(2) 线性性质

$$[\alpha f(t) + \beta g(t)]^\wedge = \alpha \hat{f} + \beta \hat{g} \tag{1.42}$$

式中，α,β 是常数。

(3) 平移性质

$$[f(t-u)]^\wedge = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}u\omega}\hat{f}(\omega) \tag{1.43}$$

(4) 伸缩性质

$$[f(st)]^\wedge = \frac{1}{|s|}\hat{f}\left(\frac{\omega}{s}\right), \quad s(\neq 0) \in \mathbf{R} \tag{1.44}$$

(5) 微分性质

时域求导

$$[f^{(p)}(t)]^\wedge = (\mathrm{i}\omega)^p \hat{f}(\omega) \tag{1.45}$$

频域求导

$$[\hat{f}(\omega)]^{(p)} = [(-\mathrm{i}t)^p f(t)]^\wedge \tag{1.46}$$

(6) 共轭性质

$$[\overline{f(t)}]^\wedge = \overline{\hat{f}}(-\omega) \tag{1.47}$$

(7) 乘积定理

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \frac{1}{2\pi}\langle \hat{f}(\omega), \hat{g}(\omega) \rangle \tag{1.48}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 \mathrm{d}\omega \tag{1.49}$$

式(1.48)称为 Parseval 恒等式，式(1.49)称为能量等式。

(8) 卷积定理

$$[f * g]^\wedge = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega) \tag{1.50}$$

$$[f \cdot g]^\wedge = \frac{1}{2\pi}\hat{f} * \hat{g}(\omega) \tag{1.51}$$

习　　题

1. 证明：若 $f \in L^1(\mathbf{R})$，则 $\hat{f}(\omega)$ 是有界的且是 ω 的连续函数；或若 $\hat{f} \in L^1(\mathbf{R})$，则 $f(t)$ 连续。

2. 证明式(1.41) 和式(1.48)。

3. 证明式(1.50) 和式(1.51)。

4. 设高斯函数 $g(t) = \exp(-t^2)$，

(1) 直接求 $g(t)$ 的 Fourier 变换 $\hat{g}(\omega)$；

(2) 证明 $\hat{g}(\omega)$ 满足微分方程

$$2\hat{g}'(\omega) + \omega \hat{g}(\omega) = 0$$

(3) 求解(2) 中的微分方程。

5. 证明：卷积的微分性质：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f * h)(t) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} * h(t) = f * \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}(t)$

6. 设 $f(t)$ 连续，$\delta(t)$ 为 Dirac 函数，则有

$$f * \delta(t) = f(t)$$

7. 证明：若 $\hat{f}(\omega)$ 具有衰减性

$$|\hat{f}(\omega)| \leqslant C(1+|\omega|)^{-p-\varepsilon}, \qquad (C \text{ 为正的常数}, \varepsilon > 0)$$

则 $f(t)$ 是 $p-1$ 次可微且有界。

第2章　小波变换

在第1章中介绍了Fourier分析，关于信号 $f(t)$ 的Fourier变换 $\hat{f}(\omega)$，我们已经知道它仅描述了信号的频率特征，丢失了信号在时域中的信息。例如，在某一很小的时段上信号发生了突变，而Fourier变换却反映不出信号突变的位置。人们用Fourier变换研究信号时发现，时域上平滑性好的信号(局部性较差)，在频域上却有较好的局部性，而在时域上局部性明显的信号，如突变信号，在频域上局部性却很差。所以用Fourier变换无法同时描述和定位信号在时间和频率上的突变部分，这就使得Fourier分析的应用受到了限制。Fourier分析是处理平稳信号的有力工具。随着科学技术的发展，人们还需要处理非平稳信号。本章介绍小波变换，利用小波分析研究信号，可以克服Fourier分析应用上的局限性。

2.1　小波函数

"波"是有振荡性的，"小波"就是在较短时间区间上有振荡的波，用来表示小波的函数，称为小波函数，记为 $\psi(t)$。在数学中这样的函数可以用两个条件来刻画：

(1) $\psi(t)$ 具有有限支撑或是速降为零的函数；

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(t)\mathrm{d}t=0$。

在实际中，人们总是研究能量有限的信号 $f(t)$，因此以后总假定函数 $f(t)\in L^2(\mathbf{R})$，同样也有 $\psi(t)\in L^2(\mathbf{R})$。由于应用上的需要，要求由小波变换能重构原信号，对小波函数还要求它满足容许性条件：

$$C_\psi=\int_0^{+\infty}\frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega}\mathrm{d}\omega<+\infty \tag{2.1}$$

满足容许性条件的小波称为容许小波。

小波函数 $\psi(t)$ 常被称为母小波，因为对 $\psi(t)$ 作平移、伸缩可以得到一族小波函数

$$\left\{\psi_{a,b}(t)=\frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\mid a>0,b\in\mathbf{R}\right\} \tag{2.2}$$

这族函数中的每一个都有规范化的范数 $\|\psi_{a,b}\|=\|\psi(t)\|=1$。

当让 a 和 b 取一系列离散值时，例如 $a=2^j, b=2^jk(j,k\in\mathbf{Z})$，就可以得到一族小波函数

$$\psi_{j,k}(t)=2^{-j/2}\psi(2^{-j}t-k),\qquad j,k\in\mathbf{Z}\tag{2.3}$$

在一定条件下，$\{\psi_{j,k}(t)\mid j,k\in\mathbf{Z}\}$ 可以构成 $L^2(\mathbf{R})$ 的"基"，用它可以表示 $f(t)$。由于这种基的生成方式简单，且 $\psi(t)$ 又有良好的局部性和其他性质，因此函数 $f(t)$ 用小波基表示后有着广泛的应用。

2.2　连续小波变换

2.2.1　连续小波变换的概念

定义 2.1　设 $f(t)\in L^2(\mathbf{R})$，$\psi(t)$ 是容许小波，则称

$$(Wf)(a,b)=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\bar{\psi}\left(\frac{t-b}{a}\right)\mathrm{d}t,\qquad a>0\tag{2.4}$$

为函数 $f(t)$ 的连续小波变换。其中 a 称为尺度因子或伸缩因子，b 称为平移因子。

小波变换也是一种积分变换，它是将单变量的函数 $f(t)$ 变换成时频平面(或时间尺度平面)上的二元函数 $(Wf)(a,b)$。从时频分析来看，小波变换将信号 $f(t)$ 的每个瞬态分量映射到时频平面上的位置正好对应于分量的频率和发生的时间，而函数 $(Wf)(a,b)$ 在 (a,b) 处的值反映了在时刻 b 频率为 $\frac{1}{a}$ 的分量的有关信息。

从式(2.4)可知，小波变换可以用内积表示

$$(Wf)(a,b)=\langle f(t),\psi_{a,b}(t)\rangle\tag{2.5}$$

小波变换能刻画信号 $f(t)$ 的局部特征，有效检测瞬变信号。这是因为小波 $\psi_{a,b}(t)$ 既可以是有限支撑，又具有伸缩平移的灵活性。例如，设小波的支撑 $\mathrm{supp}\psi(t)=[-1,1]$，即

$$\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)=\begin{cases}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right), & t\in[b-a,b+a]\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

则

$$(Wf)(a,b)=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\bar{\psi}\left(\frac{t-b}{a}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{b-a}^{b+a}f(t)\bar{\psi}\left(\frac{t-b}{a}\right)\mathrm{d}t$$

由此可知小波具有窗函数的作用，可以用小波 $\psi(t)$ 研究以 $t=b$ 为中心半径与 a 有关的邻域内信号 $f(t)$ 的局部情况。当 $f(t)$ 在 $t=b_1$ 附近波形平缓时，可以增大尺度 a，用伸展了的小波 $\psi_{a,b_1}(t)$ 去观察 $f(t)$。若 $f(t)$ 在 $t=b_2$ 附近波形变化激烈，减小 a，用压缩的小波 $\psi_{a,b_2}(t)$ 观察 $f(t)$。随着 b 的变化，小波沿时间轴移动，随 $f(t)$ 波形变化，改变尺度 a，就像用

“显微镜”一样通过调焦来观察 $f(t)$ 的局部信息(见图 2.1)。

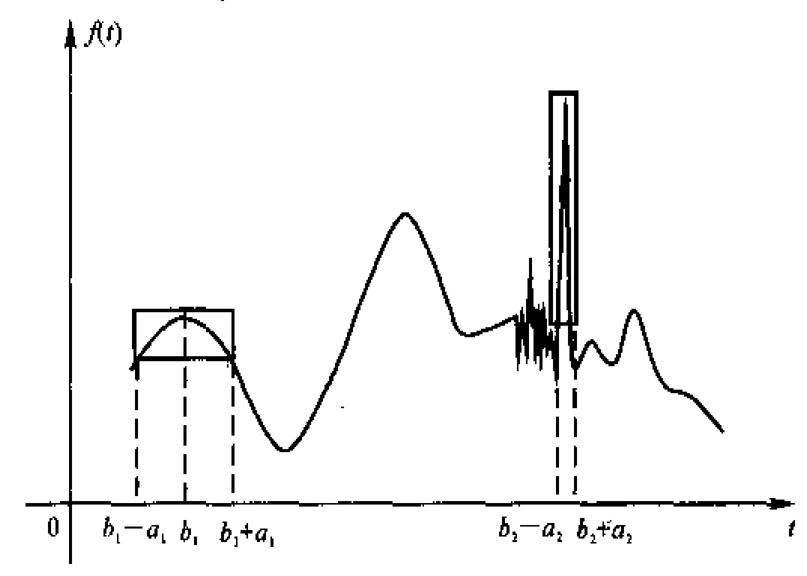


图 2.1　连续小波变换的时频局部化示意图

由前面所述小波的特性可知,小波的能量集中在以 b 为中心的一个区间上,a 的选取使得能用一个很贴近 $f(t)$ 的小波与 $f(t)$ 作内积,所以 $|(Wf)(a,b)|$ 能度量 $f(t)$ 在 $t=b$ 附近的能量大小。又由于

$$(Wf)(a,b)=\langle f,\psi_{a,b}(t)\rangle=\frac{1}{2\pi}\langle\hat{f}(\omega),\hat{\psi}_{a,b}(\omega)\rangle$$

即小波变换幅值还能度量信号 $f(t)$ 在频域中 $\hat{\psi}_{a,b}$ 的能量集中的区域上的能量大小。

此外,利用小波变换 $(Wf)(a,b)$ 还能研究 $f(t)$ 的局部光滑性、奇异点的位置、检测图像的边缘等,这些将在第 6 章中可以看到或参阅所附文献。

2.2.2* 窗函数与 Heisenberg 测不准原理

为了进一步对小波变换及图 2.1 的理解,把小波 $\psi(t)$ 看成一个窗函数,利用时-频窗来理解小波变换的时频局部化能力。

定义 2.2　设 $\psi(t)$ 具有有限支撑,则称

$$t^*=\frac{1}{\|\psi\|^2}\int_{\mathbf{R}}t|\psi(t)|^2\mathrm{d}t \tag{2.6}$$

为时窗中心,称

$$\Delta t=\frac{1}{\|\psi\|}\left[\int_{\mathbf{R}}(t-t^*)^2|\psi(t)|^2\mathrm{d}t\right]^{1/2} \tag{2.7}$$

为时窗半径,称

$$\omega^*=\frac{1}{\|\hat{\psi}(\omega)\|^2}\int_{\mathbf{R}}\omega|\hat{\psi}(\omega)|^2\mathrm{d}\omega \tag{2.8}$$

为频窗中心，称

$$\Delta\omega = \frac{1}{\|\hat{\psi}\|}\left[\int_{\mathbf{R}}(\omega-\omega^*)^2|\hat{\psi}(\omega)|^2\mathrm{d}\omega\right]^{1/2} \tag{2.9}$$

为频窗半径。

下面计算 $\psi_{a,b}(t)$ 的时窗和频窗中心及半径。利用 2.1 节中的关于小波函数的介绍，可知 $\|\psi_{a,b}(t)\|^2 = \|\psi(t)\|^2 = 1$，由式(2.6) ~ 式(2.9)，得

$$\begin{aligned} t^* &= \int_{\mathbf{R}} t|\psi_{a,b}(t)|^2\mathrm{d}t = \int_{\mathbf{R}} t\,\frac{1}{a}\left|\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\right|^2\mathrm{d}t = \\ &\int_{\mathbf{R}}(au+b)|\psi(u)|^2\mathrm{d}u = \int_{\mathbf{R}} au|\psi(u)|^2\mathrm{d}u + \int_{\mathbf{R}} b\|\psi\|^2\mathrm{d}u = \\ &at_\psi^* + b \end{aligned} \tag{2.10}$$

式中，t_ψ^* 是 $\psi(t)$ 的窗中心。

$$\begin{aligned} \Delta t &= \left[\int_{\mathbf{R}}(t-t^*)^2|\psi_{a,b}(t)|^2\mathrm{d}t\right]^{1/2} = \\ &\left[\int_{\mathbf{R}}(t-at_\psi^*-b)^2\,\frac{1}{a}\left|\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\right|^2\mathrm{d}t\right]^{1/2} = \\ &\left[\int_{\mathbf{R}}(au+b-at_\psi^*-b)^2|\psi(u)|^2\mathrm{d}u\right]^{1/2} = \\ &\left[a^2\int_{\mathbf{R}}(u-t_\psi^*)^2|\psi(u)|^2\mathrm{d}u\right]^{1/2} = a\Delta t_\psi \end{aligned} \tag{2.11}$$

式中，Δt_ψ 是 $\psi(t)$ 的窗半径。类似地，有

$$\|\hat{\psi}_{a,b}(\omega)\|^2 = \int_{\mathbf{R}}\left|\sqrt{a}\hat{\psi}(a\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}b\omega}\right|^2\mathrm{d}\omega = \|\hat{\psi}(\omega)\|^2$$

于是有

$$\begin{aligned} \omega^* &= \frac{1}{\|\hat{\psi}_{a,b}(\omega)\|^2}\int_{\mathbf{R}}\omega|\hat{\psi}_{a,b}(\omega)|^2\mathrm{d}\omega = \\ &\frac{1}{\|\hat{\psi}(\omega)\|^2}\int_{\mathbf{R}}\omega\, a\,|\hat{\psi}(a\omega)|^2\mathrm{d}\omega = \frac{1}{a}\omega_\psi^* \end{aligned} \tag{2.12}$$

式中，ω_ψ^* 是 $\hat{\psi}(\omega)$ 的窗中心。

$$\begin{aligned} \Delta\omega &= \frac{1}{\|\hat{\psi}_{a,b}(\omega)\|}\left[\int_{\mathbf{R}}(\omega-\omega^*)|\hat{\psi}_{a,b}(\omega)|^2\mathrm{d}\omega\right]^{1/2} = \\ &\frac{1}{\|\hat{\psi}(\omega)\|}\left[\int_{\mathbf{R}}\left(\omega-\frac{1}{a}\omega_\psi^*\right)\,|\,a|\hat{\psi}(a\omega)|^2\mathrm{d}\omega\right]^{1/2} = \frac{1}{a}\Delta\omega_\psi \end{aligned} \tag{2.13}$$

由式(2.10) ~ 式(2.13) 可以看出，$\psi(t)$ 经平移与伸缩变为 $\psi_{a,b}(t)$ 后，$\psi_{a,b}$ 的时窗中心和半径与 $\psi(t)$ 的时窗中心和半径之间的关系，以及 $\psi_{a,b}(t)$ 的频窗中心和半径与 $\psi(t)$ 的频窗中心和半径的关系。由这些关系，容易发现，对于确定的 b，当 a 增大时(此时波形变得平

缓，频率变小)，小波的时窗宽增加，而频窗宽减小；当a减小时，情形正好相反，它完全符合Heisenberg测不准原理。

在时-频相平面上，对于任意固定的b，都可以作出$\psi_{a,b}(t)$相应的时-频窗(以$2\Delta t$为底，$2\Delta\omega$为高的矩形窗口)，其面积为

$$2\Delta t\times 2\Delta\omega=4a\Delta t_{\psi}\frac{1}{a}\Delta\omega_{\psi}=4\Delta t_{\psi}\,\Delta\omega_{\psi} \tag{2.14}$$

它是不随a,b变化而变化的(Heisenberg测不准原理的特殊情形)。

从上面的叙述可以看出，小波$\psi_{a,b}(t)$的时-频窗，可以随b与a的变化在时频相平面上移动，虽然其面积不变，但宽和高可以变化(见图2.2)。

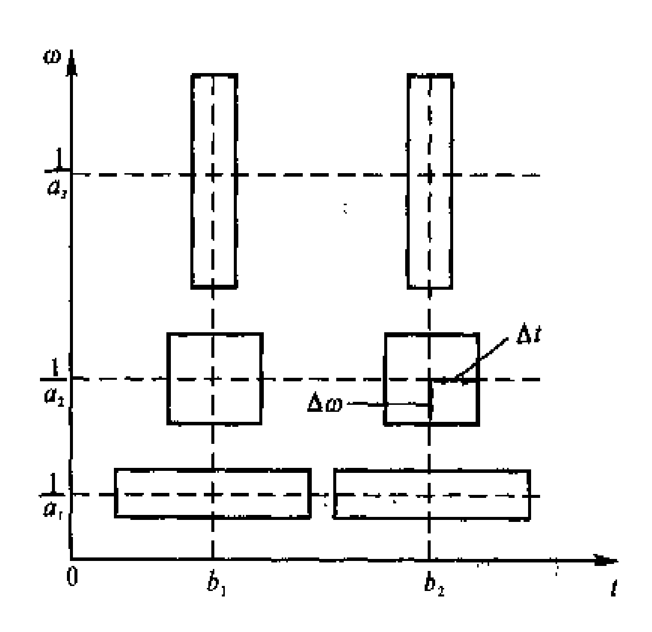


图2.2　小波函数$\psi_{a,b}(t)$的时-频窗

利用$\psi_{a,b}(t)$的时-频窗，我们就可以观察到$f(t)$的局部特征。通过改变平移因子b，即移动窗口，可以对$f(t)$进行扫描，再通过调节伸缩因子a来达到观察$f(t)$时所需要的精度。因此，常说小波具有"显微镜"的调焦功能。图2.1中的矩形窗口就是上面所说的时-频窗。

利用Parseval恒等式(1.48)，有

$$(Wf)(a,b)=\langle f(t),\psi_{a,b}(t)\rangle=\frac{1}{2\pi}\langle\hat{f}(\omega),\hat{\psi}_{a,b}(\omega)\rangle=$$

$$\frac{a^{\frac{1}{2}}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}b\omega}\hat{\psi}(a\omega)\mathrm{d}\omega \tag{2.15}$$

式(2.15)是小波变换在频域上的表现形式。

类似于在时域上的表现形式，$(Wf)(a,b)$反映了信号$\hat{f}(\omega)$($f(t)$的频域形式)的局部信息，例如$|(Wf)(a,b)|$反映了$\hat{f}(\omega)$在两个带上的能量大小，而带宽依赖于伸缩因子a。

2.2.3 连续小波变换的性质

性质 1 （线性）设 $f(t),g(t)\in L^2(\mathbf{R})$，$\alpha,\beta$ 是任意常数，则

$$(W(\alpha f+\beta g))(a,b)=\alpha(Wf)(a,b)+\beta(Wg)(a,b) \tag{2.16}$$

性质 2 （平移性）设 $f\in L^2(\mathbf{R})$，则

$$(Wf(t-t_0))(a,b)=(Wf)(a,b-t_0) \tag{2.17}$$

性质 3 （尺度法则）设 $f(t)\in L^2(\mathbf{R})$，则

$$(Wf(\lambda t))(a,b)=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}(Wf)(\lambda a,\lambda b),\qquad \lambda>0 \tag{2.18}$$

性质 4 （乘法定理）设 $f(t),g(t)\in L^2(\mathbf{R})$，则

$$\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(Wf)(a,b)(\overline{Wg})(a,b)\,\frac{\mathrm{d}b\mathrm{d}a}{a^2}=C_\psi\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\bar{g}(t)\mathrm{d}t \tag{2.19}$$

式中，C_ψ 是式(2.1)定义的容许常数。

证明　记

$$F(x)\xlongequal{\text{def}}\hat{f}(x)\,\overline{\hat{\psi}(ax)}$$

$$G(x)\xlongequal{\text{def}}\hat{g}(x)\,\overline{\hat{\psi}(ax)}$$

则

$$\begin{aligned}(Wf)(a,b)&=\left\langle f(t),a^{-1/2}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\right\rangle=\\&\frac{1}{2\pi}\langle\hat{f}(\omega),a^{1/2}\hat{\psi}(a\omega)\mathrm{e}^{-ib\omega}\rangle=\\&\frac{1}{2\pi}a^{1/2}\int_{\mathbf{R}}\hat{f}(\omega)\,\overline{\hat{\psi}(a\omega)}\,\mathrm{e}^{ib\omega}\mathrm{d}\omega=\\&\frac{1}{2\pi}a^{1/2}\int_{\mathbf{R}}F(\omega)\mathrm{e}^{-i(-b)\omega}\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}a^{1/2}\hat{F}(-b)\end{aligned}$$

同样

$$(Wg)(a,b)=\frac{1}{2\pi}a^{1/2}\hat{G}(-b)$$

因此

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}}(Wf)(a,b)\,(\overline{Wg)(a,b})\mathrm{d}b&=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2a\int_{\mathbf{R}}\hat{F}(-b)\,\overline{\hat{G}(-b)}\,\mathrm{d}b=\\&\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2a\int_{\mathbf{R}}\hat{F}(b)\,\overline{\hat{G}(b)}\,\mathrm{d}b=\\&\frac{1}{2\pi}a\int_{\mathbf{R}}F(x)\,\overline{G(x)}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

将上式乘以$\frac{1}{a^2}$对 a 积分，有

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{a^2}\mathrm{d}a\int_{\mathbf{R}}(Wf)(a,b)\ \overline{(\omega g)(a,b)}\mathrm{d}b=\int_0^{+\infty}\int_{\mathbf{R}}\frac{1}{2\pi}a\ \frac{1}{a^2}F(x)\ \overline{G(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}a=$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}}\frac{|\hat{\psi}(ax)|^2}{a}\hat{f}(x)\ \overline{\hat{g}(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}a=$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}}\hat{f}(x)\ \overline{\hat{g}(x)}\left(\int_0^{+\infty}\frac{|\hat{\psi}(ax)|^2}{ax}\mathrm{d}(ax)\right)\mathrm{d}x=$$

$$C_\psi\frac{1}{2\pi}\int\hat{f}(x)\ \overline{\hat{g}(x)}\mathrm{d}x=C_\psi\langle f(t),g(t)\rangle$$

性质 5　在性质 4 中，若 $f(x)=g(x)$，可得

$$\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a^2}|(Wf)(a,b)|^2\mathrm{d}b\mathrm{d}a=C_\psi\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|^2\mathrm{d}t \tag{2.20}$$

式(2.20) 描述了小波变换与原信号之间的能量关系，类似于 Fourier 变换性质中的式(1.49)。

性质 6　（逆变换公式或重构公式）设 $f(t)\in L^2(\mathbf{R})$，$\psi(t)$ 是容许小波，则

$$f(t)=\frac{1}{C_\psi}\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a^2}(Wf)(a,b)\ \psi_{a,b}(t)\mathrm{d}b\mathrm{d}a \tag{2.21}$$

证明　在式(2.19) 中取 $g(t)=\delta(t-x)$，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\bar{g}(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\delta(t-x)\mathrm{d}t=f(x)$$

$$(Wg)(a,b)=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-x)\bar{\psi}_{a,b}(t)\mathrm{d}t=\bar{\psi}_{a,b}(x)$$

将以上两式代入式(2.19) 中，有

$$\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a^2}(Wf)(a,b)\ \psi_{a,b}(x)\mathrm{d}b\mathrm{d}a=C_\psi f(x)$$

从而有

$$f(x)=\frac{1}{c_\psi}\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a^2}(Wf)(a,b)\ \psi_{a,b}(x)\mathrm{d}b\mathrm{d}a$$

连续小波变换无论在理论上还是在实际中都有许多应用，这将在以后的介绍中看到。

2.3　离散小波变换

由重构公式(2.21)可知，$f(t)$ 可由它的小波变换 $(Wf)(a,b)$ 精确重构，它可以看成将 $f(t)$ 按“基”$\psi_{a,b}$ 的展开或分解，系数就是小波变换 $(Wf)(a,b)$。但是，$\psi_{a,b}$ 中的参数 a,b 是连续变化的，$\psi_{a,b}(t)$ 和它旁边的 $\psi_{a,b}(t)$ 分不开，使得 $\psi_{a,b}(t)$ 彼此之间不是线性无关，这就导致了 $(Wf)(a,b)$ 之间具有相关性。也就是说用“基”$\psi_{a,b}(t)$ 表示 $f(t)$ 的式(2.21) 中，有许

多 $\psi_{a,b}(t)$ 是多余的，需要将那些多余的 $\psi_{a,b}(t)$ 去掉，寻找彼此线性无关的 $\psi_{a,b}(t)$，用数量相对少的 $\psi_{a,b}(t)$ 作为"基"来表示 $f(t)$。为此，先将 $\psi_{a,b}(t)$ 中的参数 a,b 离散化，以期达到目的。这样就需要引入离散小波变换的概念。

2.3.1 离散小波变换的概念

对小波函数 $\psi_{a,b}(t)$ 中的参数 a,b 离散化，取 $a=a_0^j, b=a_0^j k, j,k\in\mathbf{Z}$，得到小波函数

$$\psi_{j,k}(t)=a_0^{-j/2}\psi(a_0^{-j}t-k),\qquad j,k\in\mathbf{Z} \tag{2.22}$$

定义 2.2　设 $f(t)\in L^2(\mathbf{R})$，则称

$$(Wf)(j,k)=a_0^{-j/2}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\bar{\psi}(a_0^{-j}t-k)\mathrm{d}t \tag{2.23}$$

为 $f(t)$ 的离散小波变换。

类似式(2.5)，离散小波变换也可用内积表示，即

$$(Wf)(j,k)=\langle f(t),\psi_{j,k}(t)\rangle \tag{2.24}$$

离散小波变换是将时间函数 $f(t)$ 变换到位移(时间)-尺度相平面上的离散点处的函数 $(Wf)(j,k)$，这些离散点按一定的规则分布，与连续小波变换相比，少了很多点上的值。

联想本节开始所述的一段话，这里自然会引出两个问题：

(1) 能否由 $(Wf)(j,k)$ 以数值稳定的方法重构原信号 $f(t)$？也就是说，$\{(Wf)(j,k): j,k\in\mathbf{Z}\}$ 是否包含了函数 $f(t)$ 的全部信息？

(2) 是否任意函数 $f(t)\in L^2(\mathbf{R})$ 都可以用 $\psi_{j,k}(t)$ 为"基"来表示，即 $f(t)=\sum\limits_{j,k\in\mathbf{Z}}d_{j,k}\psi_{j,k}(t)$？如果可以，系数 $d_{j,k}$ 怎样确定呢？

这两个问题实质上是一个问题的对偶形式，答案当然是一致的。在下一段中，我们将简要回答这一问题。

2.3.2 Riesz 基

在 2.3.1 段中提出的问题是与框架有关的，这里不详细讨论框架，只引出框架的概念，进而给出 Riesz 基的定义，在简单的情况下，回答前面的问题。

定义 2.3　在 H 空间中，设 $\{\varphi_n\}$ 为一函数序列，若对任何函数 $f(t)\in H$，存在两个常数 $0<A\leqslant B<+\infty$，使得

$$A\|f\|^2\leqslant\sum_n|\langle f,\varphi_n\rangle|^2\leqslant B\|f\|^2 \tag{2.25}$$

则称 $\{\varphi_n\}$ 是一个框架，称 A,B 为框架的下、上界；当 $A=B$ 时称为一个紧框架。

在定义 2.3 中，如果函数序列 $\{\varphi_n\}$ 取为序列 $\{\psi_{j,k}(t)\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$，则称 $\{\psi_{j,k}(t)\}$ 为小波框架。

框架概念是在研究由信号的离散样本值是否能重构原带限信号 $f(t)$ 时提出的，是"基"概念的推广，比基的条件宽松一些，它并未要求 $\{\varphi_n\}$ 一定是线性无关的。式(2.25) 是

一般的条件，它保证 H 空间中任何 $f(t)$ 能由 $\langle f,\varphi_n\rangle$ 以数值稳定的方法重构 $f(t)$。条件式(2.25)是加给 $\{\varphi_n\}$ 的一种限制。

在小波函数 $\psi_{j,k}(t)$ 中，如果对尺度间隔 a，时间间隔 b 不加限制，此时相应的离散小波变换 $\langle f,\psi_{j,k}\rangle$ 就不一定包含了 $f(t)$ 的全部信息，因而也就不一定能重构 $f(t)$。所以要想由离散小波变换 $\langle f,\psi_{j,k}\rangle$ 重构 $f(t)$，就必须对 $\{\psi_{j,k}(t)\}$ 加以限制，这个限制就是框架条件式(2.25)。

定义 2.4 在 H 空间，如果函数序列 $\{\varphi_n\}$ 满足条件式(2.25)，且 $\{\varphi_n\}$ 还是线性无关的，即若 $\sum\limits_{n\in\mathbf{Z}} c_n\varphi_n = 0$，必有 $c_n = 0$，则称 $\{\varphi_n\}$ 是 Riesz 基。

Riesz 基也常用如下定义，在 H 中，设 $\{\varphi_n\}$ 为函数序列，对于任何函数 $f(t)\in H$，总存在 $\{c_n\}\in l^2$，使得

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n\varphi_n(t)$$

而且满足条件

$$A\sum_{n\in\mathbf{Z}} |c_n|^2 \leqslant \left\| \sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n\varphi_n(t) \right\|^2 \leqslant B\sum_{n\in\mathbf{Z}} |c_n|^2 \tag{2.26}$$

式中，$0 < A \leqslant B < +\infty$，称为 Riesz 基的下、上界。

可以证明，上面的两种定义是等价的。

在 2.3.1 段提出问题(1)中所说的由 $(Wf)(j,k) = \langle f,\psi_{j,k}\rangle$ 以数值稳定的方法重构信号 $f(t)$，其意思是，如果 $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 的 Riesz 基，此时，

$$f(t) = \sum_{j,k\in\mathbf{Z}} c_{j,k}\psi_{j,k}(t)$$

当 $\|f\|^2$ 很小时，$\sum\limits_{j,k\in\mathbf{Z}} |c_{j,k}|^2$ 也很小，即 $f(t)$ 的能量与其在 Riesz 基下的表示系数的能量密切相关。在 $\{\psi_{j,k}\}$ 正交的条件下，$c_{j,k} = \langle f,\psi_{j,k}\rangle$。

现在可以在相对简单的条件回答前面的问题。

设 $\{\psi_{j,k}\}$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个规范正交基，即

$$\langle \psi_{j,k},\psi_{m,n}\rangle = \delta_{j,m}\delta_{k,n}, \qquad j,k,m,n\in\mathbf{Z} \tag{2.27}$$

此时，$\{\psi_{j,k}\}$ 一定是 Riesz 基，且 Riesz 基的上、下界 $A = B = 1$。反之，结论也成立。

事实上，当 $\{\psi_{j,k}\}$ 是规范正交基时，有

$$f(t) = \sum_{j,k} c_{j,k}\psi_{j,k}(t) \tag{2.28}$$

由式(2.28)，又有

$$\langle f,\psi_{m,n}\rangle = \sum_{j,k} c_{j,k}\langle \psi_{j,k},\psi_{m,n}\rangle$$

由 $\{\psi_{j,k}\}$ 的规范正交性，得

$$c_{j,k} = \langle f,\psi_{j,k}\rangle, \qquad j,k\in\mathbf{Z}$$

从而有

$$f(t) = \sum_{j,k} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k} \tag{2.29}$$

式(2.29) 两边各作内积，有

$$\| f \|^2 = \sum_{j,k} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2 \tag{2.30}$$

式(2.30) 即是条件式(2.25) 当 $A = B = 1$ 时的情形。

反之，当 $A = B = 1$ 时，由式(2.26)$\Rightarrow \{\psi_{j,k}\}$ 正交。

综合前而的讨论可知，当 $\{\psi_{j,k}\}$ 满足框架条件式(2.25) 且 $A = B = 1$ 时，就能由 $(Wf)(j,k) = \langle f, \psi_{j,k} \rangle$ 以数值稳定的方法重构原函数 $f(t)$，即 $f(t)$ 可由 $\psi_{j,k}$ 为基表示出来，其表示的系数 $c_{j,k}$ 可以由 $\langle f, \psi_{j,k} \rangle$ 确定。

更一般地，只要 $\{\psi_{j,k}\}$ 满足框架条件，不要求 $A = B = 1$，也有与上面类似的结果，不过此时的推导需要引入 $\psi_{j,k}(t)$ 的对偶小波 $\tilde{\psi}_{j,k}(t)$。

定义 2.5　设 $\psi(t) \in L^2(\mathbf{R})$，令伸缩系数 $a = 2^j$。如果存在两个常数 $0 < A \leqslant B < \infty$，使

$$A \leqslant \sum_{j \in \mathbf{Z}} |\hat{\psi}(2^j \omega)|^2 \leqslant B \tag{2.31}$$

则称 $\psi(t)$ 为二进小波。

式(2.31) 称为稳定性条件，它与式(2.25) 等价。从前面的讨论可知，二进小波变换能以数值稳定的方法重构原信号 $f(t)$。从计算角度来看，二进小波有着广泛的应用。

小　结

本章主要介绍 $L^2(\mathbf{R})$ 中小波函数 $\psi(t)$ 和小波变换。研究小波的目的，是想找到一种简单的同时又具有时域和频域局部化能力的函数 $\psi(t)$，用它既能表示信号 $f(t)$，又能表示系数重构信号。

(1) 连续小波变换。小波是一个速降为零的(或短支撑的) 波形函数。由于重构信号的需要，小波还须满足容许性条件：

$$C_\psi = \int_0^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} \mathrm{d}\omega < +\infty \tag{1}$$

这样的小波称为容许小波。

应用中总是将小波(或称为母小波) 进行平移和伸缩，得到一族小波

$$\left\{\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \middle| a > 0, b \in \mathbf{R}\right\} \tag{2}$$

参数 a, b 可以是连续的，也可以是离散的，如 $a = 2^j, b \in \mathbf{R}$ 或 $a = 2^j, b = 2^j k\ (j, k \in \mathbf{Z})$。

称 a 为尺度因子(伸缩因子),b 为平移因子。

$f(t)$ 的连续小波变换用内积来定义:

$$(Wf)(a,b) = \langle f(t), \psi_{a,b}(t) \rangle = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \bar{\psi}\left(\frac{t-b}{a}\right) \mathrm{d}t \tag{3}$$

这也是一种积分变换,它将时间函数 $f(t)$ 变换为时-频平面上的二元函数 $(Wf)(a,b)$。小波变换还可以用卷积来定义(见第 6 章)。

(2) 小波的局部化功能。建立小波 $\psi_{a,b}(t)$ 的时-频窗——时频平面上边平行于时间轴和频率轴的矩形窗,通过窗口来观察或研究信号。由于 $\psi_{a,b}$ 的时窗宽是 ψ 时窗宽的 a 倍,而 $\psi_{a,b}$ 的频窗宽是 ψ 频窗宽的 $\frac{1}{a}$,但 $\psi_{a,b}$ 与 ψ 的时-频窗面积是相同的。在沿时间轴平移 $\psi_{a,b}$ 的时-频窗时,可以依据信号 $f(t)$ 的波形变化而随时改变尺度 a,使得对平缓的波形用扁平的时-频窗观察信号,而对变化激烈的波形用窄而高的时-频窗观察信号。

(3) 连续小波变换的性质。重要的是理解 2.2.3 所述的性质 4 ~ 性质 6,即

乘法定理:设 $f(t), g(t) \in L^2(\mathbf{R})$,则

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (Wf)(a,b) \overline{(Wg)}(a,b) \frac{\mathrm{d}b\mathrm{d}a}{a^2} = C_\psi \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \bar{g}(t) \mathrm{d}t \tag{4}$$

式中,C_ψ 为式(1) 定义的容许常数。

能量等式:

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2} |(Wf)(a,b)|^2 \mathrm{d}b\mathrm{d}a = C_\psi \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 \mathrm{d}t \tag{5}$$

重构公式:

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2} (Wf)(a,b) \, \psi_{a,b}(t) \mathrm{d}b\mathrm{d}a \tag{6}$$

(4) 离散小波变换。由于小波和小波变换所具有的一些特性,所以,如果能用小波作为基来表示信号将是很有应用价值。重构式(6) 的表示仅具有重要的理论意义,无法用来进行数值计算。

为克服重构公式表示 $f(t)$ 的冗余性,将参数 a,b 离散化,对离散后的一族函数 $\{\psi_{j,k}(t)\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$ 再要求满足框架条件:存在常数 $0 < A \leqslant B < +\infty$,使得

$$A \| f \|^2 \leqslant \sum_{j,k} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2 \leqslant B \| f \|^2 \tag{7}$$

这样就可以由离散小波变换 $\{(Wf)(j,k)\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$ 重构原信号。

如果 $\{\psi_{j,k}(t)\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$ 是线性无关的,且又满足框架条件式(7),则 $\{\psi_{j,k}\}_{j,k}$ 构成 $L^2(\mathbf{R})$ 的 Riesz 基。若再令框架的界 $A = B = 1$,则 $\{\psi_{j,k}\}$ 成为 $L^2(\mathbf{R})$ 的标准正交基,从而有

$$f(t) = \sum_{j,k\in\mathbf{Z}} d_{j,k} \psi_{j,k}(t) = \sum_{j,k\in\mathbf{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}(t) \tag{8}$$

这样用式(8) 右端的系数即 $(Wf)f(j,k)$ 重构原信号的问题就非常清楚了。

(5) 二进小波。从数值计算角度来看，二进小波有着广泛的应用。将小波 $\psi_{a,b}(t)$ 的尺度系数取二进制离散值 $a=2^j$，再要求 ψ 满足稳定性条件：存在常数 $0<A\leqslant B<+\infty$，使得

$$A\leqslant\sum_{j\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}(2^j\omega)|^2\leqslant B,\quad \omega\neq 0 \tag{9}$$

则称 $\psi(t)$ 为二进小波。

条件式(9) 与式(7) 是等价的。

二进小波变换具有平移不变性。在第6章中将会看到，在对信号的去噪、复原和奇异性检测等方面，经常采用二进小波变换。需要说明的是，二进小波变换会产生数据冗余，但只要不是对数据压缩和编码，这种冗余性对改善处理效果还是有利的。

习　题

1. 证明式(2.16)。
2. 证明式(2.17)。
3. 证明式(2.18)。
4. 试将小波变换式(2.4) 或式(2.5) 写成卷积形式。
5. 设 $\psi(t)$ 是二进小波。证明，若存在两个常数 $0<A\leqslant B<+\infty$，使得

$$A\leqslant\sum_{j\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}(2^j\omega)|^2\leqslant B,\quad \forall\omega\in\mathbf{R}-\{0\}$$

则有

$$A\|f\|^2\leqslant\sum_{j\in\mathbf{Z}}\frac{1}{2^j}|\langle f,\psi_{2^j,b}\rangle|^2\leqslant B\|f\|^2$$

第3章 多分辨分析

在 2.3 节中我们知道，当离散小波族$\{\psi_{j,k}(t)\}_{j,k\in Z}$是正交系时，信号 $f(t)$ 就可以在这个小波基下分解与重构。从函数空间的表示来看，期望用正交基表示函数是最自然的想法，这是因为用正交基表示函数，其系数容易计算。人们寻找“基”的一个重要目的，就是希望用这个基的表示系数来反映信号的特征，从而对信号特别是复杂信号的性质进行分析时，完全可以通过分析系数来达到目的。如果某种基的表示系数是“稀疏”的，这更是人们所希望的。

例如，在 $\mathbf{R}^n$ 空间中，任意一个向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，当它用 $\mathbf{R}^n$ 中的规范正交基$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$表示时，表示系数是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，这样，任一 n 维向量 $\boldsymbol{x}$ 就与数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$一一对应。对于周期为 T 的连续函数 $f(t)$，由如下定义的内积

$$\langle f,g\rangle=\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\bar{g}(t)\mathrm{d}t$$

可知，$\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\frac{2\pi}{T}t}\}_{n\in Z}$ 是一个正交基，此时任意一个周期为 T 的连续函数，有

$$f(t)=\sum_{n\in Z}c_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t},\quad \omega=\frac{2\pi}{T}$$

其中

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega t}\mathrm{d}t$$

这样对于任一 $f(t)$，就有 $f(t)\leftrightarrow\{\cdots,c_{-1},c_0,c_1,c_2,\cdots\}$。

如何寻找或构造正交的小波基$\{\psi_{j,k}(t)\}$，多分辨分析(MRA)为我们提供了一个基本框架。多分辨分析在小波分析的发展中起着非常重要的作用。

3.1 正交小波基的特例

3.1.1 Haar 小波基

早在 1909 年，数学家 A. Haar 找到了下面的函数 $h(t)$——Haar 函数：

$$h(t)=\begin{cases}1, & x\in\left[0,\frac{1}{2}\right)\\ -1, & x\in\left[\frac{1}{2},1\right)\\ 0, & 其他\end{cases}\tag{3.1}$$

Haar 函数也称 Haar 小波，其图形见图 3.1。

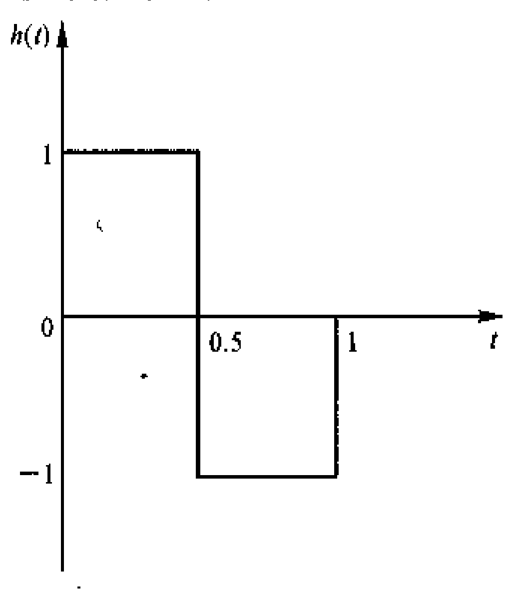


图 3.1　Haar 小波

显然 $h(t)\in L^2(\mathbf{R})$，但它不是连续函数。为构造 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个基，对 $h(t)$ 进行伸缩与平移，取 $a=2^j$，$b=2^jk$，得函数系

$$h_{j,k}(t)=2^{-j/2}h(2^{-j}t-k),\qquad j,k\in\mathbf{Z}\tag{3.2}$$

由于 $h(t)$ 的支撑为$[0,1)$，因此有

$$h_{j,k}(t)=\begin{cases}2^{-j/2}, & 2^jk\leqslant t<2^{j-1}(2k+1)\\ -2^{-j/2}, & 2^{j-1}(2k+1)\leqslant t<2^j(k+1)\\ 0, & 其他\end{cases}\tag{3.3}$$

由 $L^2(\mathbf{R})$ 中常规定义的内积与范数，容易验证 $\{h_{j,k}(t)\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 的规范正交基。由 2.3 节最后的结论可知，对于任意 $f(t)\in L^2(\mathbf{R})$，有重构公式

$$f(t)=\sum_{j,k}(Wf)(j,k)h_{j,k}(t)$$

且上式中的系数是唯一确定的。

当 $f(t)$ 连续，且 $f(t)\in L^2(\mathbf{R})$ 时，用 $\{h_{j,k}\}$ 作为基表示 $f(t)$ 是不合适的，因为 $\{h_{j,k}\}$ 本身不连续，此外

$$\hat{h}(\omega)=\frac{1-2\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\omega}{2}}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}}{\omega\mathrm{i}}\tag{3.4}$$

在频域的衰减速度仅为$\frac{1}{\omega}$，所以在频域的局部性较差。因此在实际中应用较少。

3.1.2 Littlewood－paley 小波基

取母小波函数

$$\psi(t)=\frac{1}{\pi t}(\sin 2\pi t-\sin \pi t) \tag{3.5}$$

它的图形如图 3.2 所示。

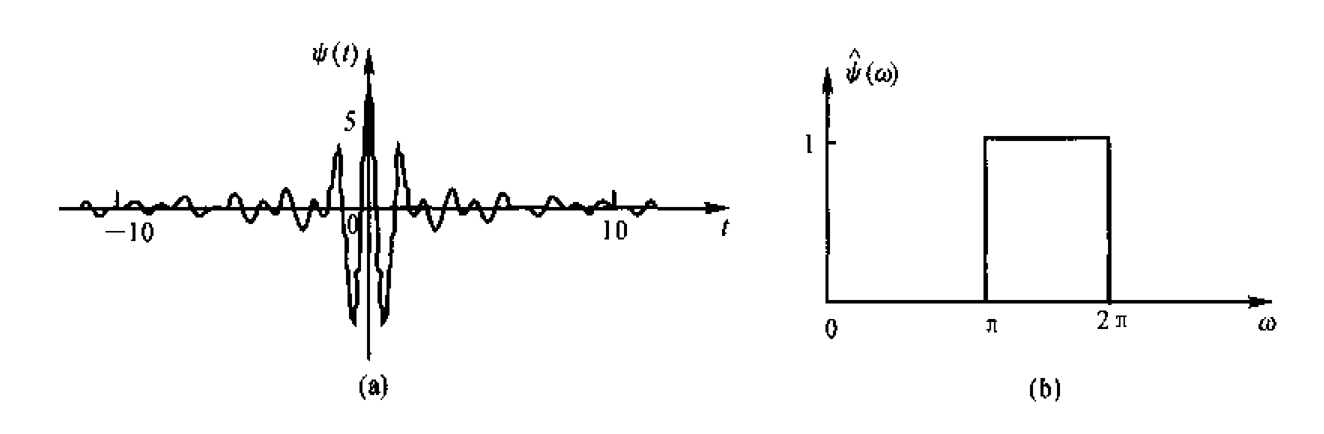


图 3.2　Littlewood－paley 小波
(a) 时域波形；(b) 频域波形

将 $\psi(t)$ 进行伸缩与平移，得到下面的函数

$$\psi_{j,k}(t)=2^{-j/2}\psi(2^{-j}t-k),\qquad j,k\in\mathbf{Z} \tag{3.6}$$

它是 $L^2(\mathbf{R})$ 的标准正交基。因为

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}}\psi_{j,k}(t)\bar{\psi}_{m,n}(t)\mathrm{d}t &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}}\hat{\psi}_{j,k}(\omega)\,\bar{\hat{\psi}}_{m,n}(\omega)\mathrm{d}\omega = \\ &\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}}2^{-(j+m)/2}2^{j+m}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(2^jk-2^mn)}\hat{\psi}(2^j\omega)\,\bar{\hat{\psi}}(2^m\omega)\mathrm{d}\omega = \\ &\frac{1}{2\pi}2^{(j+m)/2}\int_{\mathbf{R}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(2^jk-2^mn)}\hat{\psi}(2^j\omega)\,\bar{\hat{\psi}}(2^m\omega)\mathrm{d}\omega\end{aligned} \tag{3.7}$$

由于

$$\left[\frac{\sin Tt}{\pi t}\right]^{\wedge}=\begin{cases}1, & |\omega|\leqslant T\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

容易知道

$$\hat{\psi}(\omega)=\begin{cases}1, & \pi\leqslant|\omega|\leqslant 2\pi\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{3.8}$$

其图形见图 3.2。

在式(3.7) 中，当 $m \neq j$ 时，集合

$$\{\omega \mid \pi \leqslant |2^j\omega| \leqslant 2\pi\} \cap \{\omega \mid \pi \leqslant |2^m\omega| \leqslant 2\pi\}$$

最多只有一个点，故式(3.7) 等号右端积分为零。

当 $m = j, k \neq n$ 时，式(3.7) 等号右端积分为

$$\frac{2^j}{2\pi}\int_{\pi\leqslant|2^j\omega|\leqslant 2\pi} e^{-i\omega(k-n)2^j}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{\pi\leqslant|u|\leqslant 2\pi} e^{-i(k-n)u}du = 0 \quad (u = 2^j\omega)$$

综上所述，当 $(j,k) \neq (m,n)$ 时，$\psi_{j,k}(t)$ 与 $\psi_{m,n}(t)$ 正交。

由式(3.5) 可知，$\psi(t)$ 在时域的衰域速度仅为 $\frac{1}{|t|}$，因而它在时域的局部性较差；而由式(3.8) 可知，它在频域有很好的局部性。$\psi(t)$ 的上述情况正好与 Haar 小波相反，因此它的应用也受到了限制。

上面的两例，其特殊性表现在，当小波基在时域局部性较好时，在频域局部性就差，或者在频域局部性好时，则在时域局部性差。人们在研究信号的局部特性时，总希望能构造出一个在时域、频域都具有较好局部性的小波基。

构造基的方法一般有两种途径，一种是直接构造基函数。在 1989 年以前，人们利用这种方法没有找到具有上述性质的小波基。另一种是空间分解的方法，即将空间按一定规律分解成具有特定性质的子空间序列，然后再找出子空间的基并将其合成全空间的基。

第二种方法首先由 Mallat 和 Meyer 在 1989 年提出，称为多分辨分析(多尺度分析)方法。

3.2　多分辨分析

多分辨分析(Multi-Resolution-Analysis，简称 MRA)，是 Mallat[11] 和 Meyer 提出的，它的主要思想是将 $L^2(\mathbf{R})$ 按分辨率为 $\{2^{-j}\}$ 分解为一串嵌套子空间序列 $\{V_j\}$，再通过正交补的塔式分解，将 $L^2(\mathbf{R})$ 分解成一串正交小波子空间序列 $\{W_j\}$。然后将 $L^2(\mathbf{R})$ 中的函数 $f(t)$ 表示成一系列近似函数的逼近，其中每一近似函数都是 f 在不同分辨率子空间上的投影，通过这些投影来研究和分析 f 在不同子空间上的性态及特征。正因为用这种方法来分析和研究函数，所以人们把它称为多分辨分析。

为便于理解，先介绍正交多分辨分析。

定义 3.1　$L^2(\mathbf{R})$ 中的空间序列 $\{V_j\}$ 称为一个正交多分辨分析，如果它满足以下条件：

(1) 单调性：

$$\cdots \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset \cdots \tag{3.9}$$

(2) 逼近性：

$$\bigcap_{j\in Z} V_j = \{0\}, \lim_{j\to-\infty} V_j = \text{closure}(\bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} V_j) = L^2(\mathbf{R}) \tag{3.10}$$

(3) 伸缩性：

$$f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(2t) \in V_{j-1}, \quad \forall j \in \mathbf{Z} \tag{3.11}$$

(4) 平移不变性：

$$f(t) \in V_j \Rightarrow f(t-k) \in V_j \tag{3.12}$$

(5) 存在函数 $\varphi(t) \in V_0$，使得 $\{\varphi(t-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 构成 V_0 的规范正交基。

上面定义中的 $\varphi(t)$，称为多分辨分析的尺度函数或父函数。多分辨分析常记为 $(\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}, \varphi(t))$，或 $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$。

由伸缩与平移性可知，函数系 $\{2^{-j/2}\varphi(2^{-j}t-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 构成了 V_j 的一个规范正交基。这样以来，对于 $\forall f(t) \in L^2(\mathbf{R})$，$f$ 在空间 V_j 的投影是

$$f_{V_j}(t) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \langle f, \varphi_{j,k}\rangle \varphi_{j,k}(t) \tag{3.13}$$

再由逼近性可知

$$\lim_{j\to-\infty} \| f - f_{V_j} \| = 0 \tag{3.14}$$

即 $f_{V_j}(t)$ 在分辨率 2^{-j} 趋于 $+\infty$ 时趋于原信号 $f(t)$。由此可见，尺度函数 φ 对 MRA 的构造起着关键性的作用。

下面讨论如何由 $\{V_j\}$，将空间 $L^2(\mathbf{R})$ 分解成小波子空间 $\{W_j\}$ 的正交和。

由 $\{V_j\}$ 的单调性可知，$V_{j+1} \subset V_j$，即 V_{j+1} 是 V_j 的真子空间，因此，在空间的基是正交基的意义下，可以认为，V_j 是由 V_{j+1} 和 V_{j+1} 在 V_j 中的正交补空间构成的，若把这个正交补空间记成 W_{j+1}，则有

$$V_j = V_{j+1} \oplus W_{j+1} \qquad j \in \mathbf{Z} \tag{3.15}$$

这里"$\oplus$"表示正交和，即

$$V_j = V_{j+1} \cup W_{j+1} \text{ 且 } V_{j+1} \perp W_{j+1}$$

显然这种分解可以对任意的 j 进行：

$$V_{j-1} = V_j \oplus W_j = V_{j+1} \oplus W_{j+1} \oplus W_j \cdots = V_{j+s} \oplus W_{j+s} \oplus W_{j+s-1} \oplus \cdots \oplus W_j \tag{3.16}$$

由式(3.16)不难得到 $W_{j+1} \perp W_j$，继而有 $W_j \perp W_m, j \neq m$。

在(3.16)中令 $s \to +\infty$，得到

$$V_{j-1} = \bigoplus_{m=j}^{+\infty} W_m$$

再令 $j \to -\infty$，得到

$$L^2(\mathbf{R}) = \bigoplus_{j=-\infty}^{+\infty} W_j \tag{3.17}$$

这样，就把 $L^2(\mathbf{R})$ 分解成小波子空间 W_j 的正交和。

把 V_j 称为尺度空间(尺度为 j)，把 W_j 称为小波空间(尺度为 j)。由前面讨论可知，由

$\{V_j\}_{j\in Z}$ 可确定$\{W_j\}$。

由多分辨分析的性质(2)，有

$$L^2(\mathbf{R}) = \text{clos}\bigcup_{j\in Z} V_j = \overline{\bigcup_{j\in Z} V_j}$$

因此，我们得到 $L^2(\mathbf{R})$ 中的两个空间序列，一个是嵌套的闭子空间序列$\{V_j\}_{j\in Z}$，另一个是相互正交的子空间序列$\{W_j\}_{j\in Z}$。

如果存在 $\psi(t)\in W_0$，使得 $\psi(t)$ 的平移系$\{\psi(t-k)\}_{k\in Z}$ 形成空间 W_0 的规范正交基，则$\{\psi_{j,k}(t)=2^{-j/2}\psi(-2^{-j}t-k)\}_{k\in Z}$ 也形成空间 W_j 的规范正交基。这是由于 W_j 中的函数也具有伸缩性：$f(t)\in W_j \Leftrightarrow f(2t)\in W_{j-1}$。事实上，若 $f(t)\in W_j\subset V_{j-1}$，$\Rightarrow f(2t)\in V_{j-2}$，由于$V_{j-2}=V_{j-1}\bigoplus W_{j-1}$，只要 $f(2t)\overline{\in} V_{j-1}$，则必有 $f(2t)\in W_{j-1}$。可用反证法证明 $f(2t)\overline{\in} V_{j-1}$。若 $f(2t)\in V_{j-1}$，则 $f(t)\in V_j$，这与 $f(t)\in W_j$ 矛盾。类似可以证明$f(2t)\in W_{j-1}\Rightarrow f(t)\in W_j$。

假如找到了这样的 $\psi(t)$，由 $L^2(\mathbf{R})$ 的小波空间分解式(3.17)，就找到了 $L^2(\mathbf{R})$ 的规范正交小波基：

$$\{\psi_{j,k}(t)=2^{-j/2}\psi(2^{-j}t-k)\}_{j,k\in Z}$$

如何寻找小波 $\psi(t)$ 呢？想通过在小波空间直接构造小波是非常困难的。但从 MRA 的定义来看，尺度函数 φ 起着关键的刻画 MRA 构造的作用，所以可以通过尺度函数 $\varphi(t)$ 来构造小波 $\psi(t)$。为此，先要研究它们应满足的性质以及它们之间的关系。

3.3 尺度函数和小波函数的性质

在多分辨分析的定义中说存在函数 $\varphi(t)$，它的平移系构成 V_0 的规范正交基，但并不是说任何一个函数都具有这种性质。

定理 3.1 设 $\varphi(t)\in L^2(\mathbf{R})$，令 $\varphi_{0,k}(t)=\varphi(t-k)$，则

$\{\varphi_{0,k}(t)\}_{k\in Z}$ 是规范正交基 $\Leftrightarrow$

$$\sum_{k\in Z}|\hat{\varphi}(\omega+2k\pi)|^2=1,\quad \forall\omega\in\mathbf{R} \tag{3.18}$$

证明 由 Parseval 等式，有

$$\begin{aligned}\langle\varphi_{0,n},\varphi_{0,m}\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}}\hat{\varphi}_{0,n}(\omega)\overline{\hat{\varphi}_{0,m}(\omega)}\mathrm{d}\omega = \\ &\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega}\hat{\varphi}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\omega}\overline{\hat{\varphi}(\omega)}\mathrm{d}\omega = \\ &\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-m)\omega}|\hat{\varphi}(\omega)|^2\mathrm{d}\omega = \\ &\frac{1}{2\pi}\sum_{k\in Z}\int_{2k\pi}^{(2k+2)\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-m)\omega}|\hat{\varphi}(\omega)|^2\mathrm{d}\omega =\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k}\int_{0}^{2\pi}|\hat{\varphi}(\omega+2k\pi)|^{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-m)\omega}\mathrm{d}\omega=$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\sum_{k}|\hat{\varphi}(\omega+2k\pi)|^{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-m)\omega}\mathrm{d}\omega=$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}F(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-m)\omega}\mathrm{d}\omega$$

式中，$F(\omega)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{\varphi}(\omega+2k\pi)|^{2}$，这是一个周期为 2π 的函数，由于$\{\varphi_{0,k}(t)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 是规范正交基，所以有

$\{\varphi_{0,k}(t)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 规范正交基 $\Leftrightarrow\langle\varphi_{0,n},\varphi_{0,m}\rangle=\delta_{n,m}\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}F(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-m)\omega}\mathrm{d}\omega=\delta_{n,m}\Leftrightarrow$$

$$F(\omega)\equiv 1$$

定理3.2 设$\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$是$L^2(\mathbf{R})$的一个多分辨分析，$\varphi(t)$是它的尺度函数，则有$\{h_k\}\in l^2$，使

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi\left(\frac{t}{2}\right)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}h_k\varphi(t-k) \tag{3.19}$$

证明 由于 $V_1\subset V_0$，$\{\varphi(t-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 是 V_0 的规范正交基，而$\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi\left(\frac{t}{2}\right)\in V_1$，所以$\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi\left(\frac{t}{2}\right)$可用 V_0 的基线性表示：

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi\left(\frac{t}{2}\right)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}h_k\varphi(t-k)$$

且

$$h_k=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\mathbf{R}}\varphi\left(\frac{t}{2}\right)\overline{\varphi}(t-k)\mathrm{d}t$$

式(3.19)是由 MRA 导出的重要关系，称为双尺度方程。可以证明，如果$\{h_k\}$已知，由式(3.19)出发可以确定 $\varphi(t)$。

为了进一步研究和理解双尺度方程，这里插入一段介绍滤波器的内容。

滤波器是指对信号进行滤波的硬件装置或软件。这里所说的滤波器指数字滤波器，它是通过对采样数据进行数学运算处理来达到频域滤波的目的。

设 L 是一个装置，它将一种信号(输入信号)变换为另一种信号(输出信号)并向外输出。这种装置称为系统，简记为 L。例如输入为 $f(t)$，输出为 $g(t)$，则可表示为

$$L[f(t)]=g(t)$$

如果对于任意的实数 a,b，总有

$$L[af_1(t)+bf_2(t)] = ag_1(t)+bg_2(t) \tag{3.20}$$

成立，则称 L 为线性系统。图 3.3 是系统 L 的示意图。

(输入)$f(t)$ ⟶ L ⟶ $g(t)$(输出)

图 3.3　线性系统示意图

此外，若对于任意的 τ，总有

$$L[f(t-\tau)] = g(t-\tau) \tag{3.21}$$

则 L 称为时不变系统。

在信号分析中，常常将输出函数 $g(t)$ 称为响应。设 L 是一个线性时不变系统，它对函数 $\delta(t)$ 的响应 $h(t)=L[\delta(t)]$ 称为脉冲响应。系统 L 的脉冲响应是刻画系统的重要函数。不同的两个系统 L_1 和 L_2，它们对 $\delta(t)$ 的响应是不同的，人们常对系统加入脉冲，通过系统的脉冲响应来分析、判断系统，就像敲击瓷碗来判断它是否有裂缝一样。而在数学表示上，当 L 的脉冲响应为 $h(t)$ 时，输入函数 $f(t)$ 与输出函数 $g(t)$ 的关系可表示为

$$g(t) = f*h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{3.22}$$

事实上，如果输入信号 $f(t)$ 是连续的模拟信号，可以先将 $f(t)$ 分解成一系列矩形波的和，如图 3.4 所示；再给系统加上一个高为 1，宽为 T 的方形脉冲：

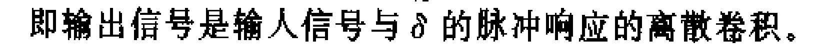
$$\tilde{\delta}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t \leqslant T \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \tag{3.23}$$

利用 $\tilde{\delta}(t)$，可将任一输入信号 $f(t)$ 表示为

$$f(t) \approx \sum_{k\in \mathbf{Z}} f(kT)\tilde{\delta}(t-KT) \tag{3.24}$$

记 $L[\tilde{\delta}(t)] = \tilde{h}(t)$ 是系统对 $\tilde{\delta}(t)$ 的脉冲响应，由于 L 是线性时不变的，所以输出信号必是

$$g(t) \approx \sum_{k} f(KT)\tilde{h}(t-KT) \tag{3.25}$$


即输出信号是输人信号与 $\tilde{\delta}$ 的脉冲响应的离散卷积。

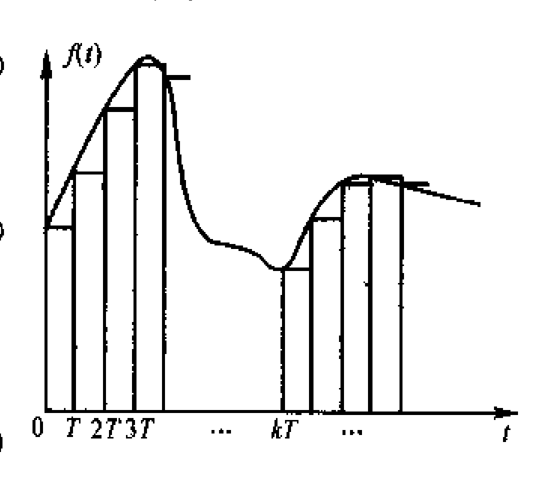


图 3.4　$f(t)$ 分解为矩形波

当方形脉冲式(3.23)的宽度 T 无限变小而趋于零时，$KT \to \tau$，$f(KT) \to f(\tau)$，$\tilde{h}(t-KT) \to h(t-\tau)$，式(3.25)成为

$$g(t) = \int_{\infty}^{+\infty} f(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

上式正好就是式(3.22)。

如果输入信号是原信号的采样值，即 $\{f(kT)\}_{k\in \mathbf{Z}}$，此时为简化记号，采样间隔规范化

为$T=1$。引入离散脉冲，记为$\delta(n)$，即

$$\delta(n)=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases}$$

则

$$f(kT)=f(k)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f(n)\delta(k-n) \tag{3.26}$$

记　$L[\delta(n)]=h(n)$ 是该系统的离散脉冲响应，由线性时不变性可得

$$L[f(k)]=g(k)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f(n)h(k-n)=f*h(k) \tag{3.27}$$

这样，无论输入是连续信号还是离散信号，系统的输出总是输入信号与系统的脉冲响应的卷积。由此可见，系统的脉冲响应可以刻画系统的动态特征。

设系统 L 的脉冲响应为$h(t)$，其 Fourier 变换记为

$$H(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=\hat{h}(\omega)$$

称 $H(\omega)$ 为 L 的系统函数，也叫传递函数。

由卷积定理，式(3.22) 可写成

$$G(\omega)=H(\omega)F(\omega)$$

或

$$\hat{g}(\omega)=\hat{h}(\omega)\hat{f}(\omega) \tag{3.28}$$

这是系统 L 在频域上的表现形式，而式(3.22) 是系统在时域上的表现形式。所以 $H(\omega)$ 或 $h(t)$ 都是刻画系统的重要函数。

一个系统的系统函数 $H(\omega)$ 若在频域上是有限支撑的，则称这个系统为理想滤波器。如果 $H(\omega)$ 支撑集包含在$(-\omega_c,+\omega_c)(\omega_c>0)$，则称该滤波器为低通的；如果其系统函数 $H(\omega)$ 的支集包含在$(-\omega_c-\delta,-\omega_c+\delta)\cup(\omega_c-\varepsilon,\omega_c+\varepsilon)$ 内，其中 $\omega_c,\delta,\varepsilon>0$，且 $-\omega_c+\delta<\omega_c-\varepsilon$，那么该滤波器称为带通的。由式(3.28) 有

$$|G(\omega)|=|H(\omega)||F(\omega)| \tag{3.29}$$

式(3.29) 表示，可以设计这样一个系统，当$\omega\in B$(某有限区间)时信号可以通过，而当$\omega\in\bar{B}$ 时，信号则不予以通过，这个系统称为滤波器。

例如，可以设计一个理想滤波器，其频率函数为

$$H(\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|\leqslant\Omega\\ 0, & |\omega|>\Omega\end{cases} \tag{3.30}$$

此时

$$h_\Omega(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega}^{\Omega}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega=\frac{\sin\Omega t}{\pi t},\quad t\in\mathbf{R} \tag{3.31}$$

当信号 $f(t)$ 通过该滤波器后变成

$$f_\Omega(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\frac{\sin\Omega(t-\tau)}{\pi(t-\tau)}\mathrm{d}\tau=f*h_\Omega(t) \tag{3.32}$$

函数 $f_\Omega(t)$ 的 Fourier 变换 $\hat{f}_\Omega(\omega)$ 的支集是$[-\Omega,\Omega]$，即

$$\hat{f}_\Omega(\omega)=0,\quad |\omega|>\Omega \tag{3.33}$$

则称这样的信号 $f_\Omega(t)$ 是带限的。

由上面所述可知，一个系统成为滤波器，主要取决于该系统的脉冲响应 $h(t)$ 或 $H(\omega)$。因此常常就直称 $H(\omega)$ 或 $h(t)$ 为滤波器。

下面继续讨论尺度函数与小波函数的性质。

在双尺度方程式(3.19)的两端取 Fourier 变换，得到

$$\sqrt{2}\hat{\varphi}(2\omega)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}h_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega}\hat{\varphi}(\omega)$$

即

$$\hat{\varphi}(2\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in\mathbf{Z}}h_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega}\hat{\varphi}(\omega)$$

记

$$H(\omega)=\hat{h}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in\mathbf{Z}}h_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega} \tag{3.34}$$

则得

$$\hat{\varphi}(2\omega)=\hat{h}(\omega)\hat{\varphi}(\omega)$$

上式也常写成

$$\Phi(2\omega)=H(\omega)\Phi(\omega) \tag{3.35}$$

式(3.34)是$\{h_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$的离散 Fourier 变换或是$\{h_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$的频域形式。

根据前面对滤波器的介绍，把式(3.35)中的 $H(\omega)$ 称为滤波器，由于 $H(\omega)$ 由$\{h_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$唯一决定，也称$\{h_k\}$为滤波器(离散滤波器)。可以证明，任何一个尺度函数 φ，都可以由滤波器$\{h_k\}$来确定。

定理3.3　设$\varphi(t)$是多分辨分析的尺度函数，$\{h_k\}$是与φ对应的滤波器，$H(\omega)$是它的频域形式，则

(1)
$$|H(\omega)|^2+|H(\omega+\pi)|^2=1 \tag{3.36}$$

(2) 若$\{h_k\}$满足$\sum_k|h_k|<1$，且 $\Phi(\omega)$ 连续而 $\Phi(0)\neq 0$，则

$$H(0)=1 \tag{3.37}$$

证明　(1) 由于 $\varphi(t)$ 是 MRA 的尺度函数，所以$\{\varphi_{0,k}(t)\}_{k\in\mathbf{Z}}$是规范正交的。

由定理 3.1,有

$$\sum_{k\in \mathbf{Z}} |\Phi(\omega+2k\pi)|^2 = 1, \qquad \forall \omega \in \mathbf{R}$$

由式(3.35),有

$$\Phi(\omega) = H\left(\frac{\omega}{2}\right)\Phi\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

将上式代入前一式,得到

$$\sum_{k\in \mathbf{Z}} \left|H\left(\frac{\omega}{2}+k\pi\right)\right|^2 \left|\Phi\left(\frac{\omega}{2}+k\pi\right)\right|^2 = 1$$

将式中求和指标分为奇、偶两组分别求和,得到

$$\sum_{k\in \mathbf{Z}} \left|H\left(\frac{\omega}{2}+2k\pi\right)\right|^2 \left|\Phi\left(\frac{\omega}{2}+2k\pi\right)\right|^2 + \sum_{k\in \mathbf{Z}} \left|H\left(\frac{\omega}{2}+2k\pi+\pi\right)\right|^2 \left|\Phi\left(\frac{\omega}{2}+2k\pi+\pi\right)\right|^2 = 1 \tag{3.38}$$

由于 $H(\omega)$ 的周期为 2π,且对任意的 ω,恒有 $\sum_k |\Phi(\omega+2k\pi+\pi)|^2 = 1$,令式(3.38)中的 $\xi = \frac{\omega}{2}, \xi' = \frac{\omega}{2}+\pi$,则有

$$|H(\xi)|^2 \sum_k |\Phi(\xi+2k\pi)|^2 + |H(\xi')|^2 \sum_k |\Phi(\xi'+2k\pi)|^2 = |H(\xi)|^2 + |H(\xi')|^2 = 1$$

再将 ξ 换成习惯常用的 ω,得

$$|H(\omega)|^2 + |H(\omega+\pi)|^2 = 1$$

(2) 在式(3.35)中,令 $\omega = 0$,有

$$\Phi(0) = H(0)\Phi(0)$$

由 $\Phi(0) \neq 0$,知 $H(0) = 1$。

定理 3.3 表明,由 $\varphi(t)$ 或相应的滤波器 $H(\omega)$ 构造正交小波时,要求 $H(\omega)$ 须满足的必要条件为式(3.36)和式(3.37)。由式(3.37)我们还得出一个重要等式:

$$\sum_{k\in \mathbf{Z}} h_k = \sqrt{2} \tag{3.39}$$

条件式(3.36)称为正交条件。$H(\omega)$ 也称为共轭正交滤波器或共轭镜像滤波器。由于 $H(0) = 1, H(\pi) = 0$,因此有时还称 $H(\omega)$ 为低通滤波器。

定理 3.4 设 $\{V_j\}_{j\in \mathbf{Z}}$ 是一个多分辨分析,$\varphi(t)$ 是尺度函数,$\{W_k\}$ 是 $\{V_j\}$ 所确定的小波空间,若 $\psi(t) \in W_1$,则有 $\{g_k\}_{k\in \mathbf{Z}} \in l^2$,使

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\psi\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{k\in \mathbf{Z}} g_k \varphi(t-k) \tag{3.40}$$

证明 由式(3.15)可知,$W_1 \subset V_0$,所以 $\psi(t)$ 可用 V_0 的基表示:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\psi\left(\frac{t}{2}\right)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}g_k\varphi(t-k)$$

且

$$g_k=\langle\frac{1}{\sqrt{2}}\psi\left(\frac{t}{2}\right),\varphi(t-k)\rangle,\qquad k\in\mathbf{Z}$$

式(3.40) 两边取 Fourier 变换,得频域形式

$$\Psi(2\omega)=G(\omega)\Phi(\omega)\tag{3.41}$$

其中

$$G(\omega)=\hat{g}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in\mathbf{Z}}g_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega k}\tag{3.42}$$

式(3.40) 也称为双尺度方程。式(3.19) 和式(3.40) 这两个双尺度方程是 MRA 赋予尺度函数 $\varphi(t)$ 和小波函数 $\psi(t)$ 最基本的性质。式(3.42) 中的 $G(\omega)$ 或 $\{g_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 被理解为与 $\psi(t)$ 相应的滤波器。

如何利用 MRA 的尺度函数 $\varphi(t)$ 构造 W_0 中的小波 $\psi(t)$,从信号处理上或从频域上来考虑,就是由 φ 的相应的滤波器 $H(\omega)$ 如何构造与小波相应的滤波器 $G(\omega)$,下面的定理是 $G(\omega)$ 成为滤波器应满足的条件。

定理 3.5　设 $\varphi(t)$ 是给定的 MRA 的尺度函数,则

(1) $\psi(t)\in W_0\Leftrightarrow H(\omega)\bar{G}(\omega)+H(\omega+\pi)\bar{G}(\omega+\pi)=0$　(3.43)

(2) $\{\psi(t-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 构成规范正交基 $\Leftrightarrow$

$$|G(\omega)|^2+|G(\omega+\pi)|^2=1\tag{3.44}$$

(3) 式(3.43) 和式(3.44) 是$\{\psi(t-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 构成 W_0 的规范正交基的充要条件。

证明*　(1) $\psi(t)\in W_0\Leftrightarrow\langle\psi(t),\varphi(t-k)\rangle=0,\forall k\in\mathbf{Z}$,而

$$\begin{aligned}\langle\psi(t),\varphi(t-k)\rangle=&\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}}\Psi(\omega)\bar{\Phi}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega k}\mathrm{d}\omega=\\&\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}}G\left(\frac{\omega}{2}\right)\Phi\left(\frac{\omega}{2}\right)\bar{H}\left(\frac{\omega}{2}\right)\bar{\Phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega k}\mathrm{d}\omega=\\&\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}}G\left(\frac{\omega}{2}\right)\bar{H}\left(\frac{\omega}{2}\right)\left|\bar{\Phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)\right|^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega k}\mathrm{d}\omega=\\&\frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbf{Z}}\int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi}G\left(\frac{\omega}{2}\right)\bar{H}\left(\frac{\omega}{2}\right)\left|\Phi\left(\frac{\omega}{2}\right)\right|^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega k}\mathrm{d}\omega=\\&\frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbf{Z}}\int_0^{2\pi}G\left(\frac{\omega}{2}+n\pi\right)\bar{H}\left(\frac{\omega}{2}+n\pi\right)\left|\Phi\left(\frac{\omega}{2}+n\pi\right)\right|^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega k}\mathrm{d}\omega=\\&\frac{1}{2\pi}\sum_{n}\int_0^{2\pi}G\left(\frac{\omega}{2}+2n\pi\right)\bar{H}\left(\frac{\omega}{2}+2n\pi\right)\left|\Phi\left(\frac{\omega}{2}+2n\pi\right)\right|^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega k}\mathrm{d}\omega+\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2\pi}\sum_n\int_0^{2\pi}G\left(\frac{\omega}{2}+2n\pi+\pi\right)\bar{H}\left(\frac{\omega}{2}+2n\pi+\pi\right)\left|\Phi\left(\frac{\omega}{2}+2n\pi+\pi\right)\right|^2 e^{i\omega k}d\omega=$$

(G,H 都是周期为 2π 的函数)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}G\left(\frac{\omega}{2}\right)\bar{H}\left(\frac{\omega}{2}\right)\sum_n\left|\Phi\left(\frac{\omega}{2}+2n\pi\right)\right|^2 e^{i\omega k}d\omega+$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}G\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)\bar{H}\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)\sum_n\left|\Phi\left(\frac{\omega}{2}+\pi+2n\pi\right)\right|^2 e^{i\omega k}d\omega=$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[G\left(\frac{\omega}{2}\right)\bar{H}\left(\frac{\omega}{2}\right)+G\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)\bar{H}\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)\right]e^{i\omega k}d\omega=0\Leftrightarrow$$

$$G\left(\frac{\omega}{2}\right)\bar{H}\left(\frac{\omega}{2}\right)+G\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)\bar{H}\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)=0$$

即

$$G(\omega)\bar{H}(\omega)+G(\omega+\pi)\bar{H}(\omega+\pi)=0$$

(2) 的证明,与定理 3.3 的证明类似。

(3) 必要性的证明,从(1),(2) 的证明可以得到。

现在只须证明:当 $\psi(t)$ 满足式(3.43) 和(3.44) 时,$\{\psi(t-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 构成 W_0 的规范正交基。由于 $V_{-1}=V_0\oplus W_0$,从而只须证明 $\{\varphi(t-k),\psi(t-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 构成 V_{-1} 的规范正交基。由(1),(2) 中已证明过的内容可知,剩下的问题就是要证明 $\{\psi(t-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 在 W_0 中是完备的,为此只要证明 $\{\varphi(t-k),\psi(t-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 在 V_{-1} 中是完备的。换句话说,就是要证明在 V_{-1} 中不再有非零的函数 $u(t)$ 与 $\{\varphi(t-k),\psi(t-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 正交。

设 $u\in V_{-1}$,如果证明了

$$\langle u,\varphi(t-k)\rangle=\langle u,\psi(t-k)\rangle=0,\forall k\in\mathbf{Z} \tag{3.45}$$

必有 $u\equiv 0$,则得到了结论。

当 $u(t)\in V_{-1}$,则有

$$u(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}a_k\varphi_{-1,k}(t)=\sum_k a_k 2^{1/2}\varphi(2t-k)$$

取 Fourier 变换,得

$$\hat{u}(\omega)=U(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in\mathbf{Z}}a_k e^{-i\frac{\omega}{2}k}\Phi\left(\frac{\omega}{2}\right),\qquad \omega\in[0,2\pi]$$

记

$$A\left(\frac{\omega}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in\mathbf{Z}}a_k e^{-i\frac{\omega}{2}k}$$

此时

$$U(\omega)=A\left(\frac{\omega}{2}\right)\Phi\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$\langle u(t),\varphi(t-k)\rangle=\frac{1}{2\pi}\langle U(\omega),\Phi(\omega)e^{-i\omega k}\rangle=$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} A\left(\frac{\omega}{2}\right)\Phi\left(\frac{\omega}{2}\right)\bar{H}\left(\frac{\omega}{2}\right)\bar{\Phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)e^{i\omega k}d\omega =$$

$$(令\ \omega = \omega + 2n\pi)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n\in\mathbf{Z}} A\left(\frac{\omega}{2}+n\pi\right)\bar{H}\left(\frac{\omega}{2}+n\pi\right)\left|\Phi\left(\frac{\omega}{2}+n\pi\right)\right|^2 e^{i\omega k}d\omega =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[A\left(\frac{\omega}{2}\right)\bar{H}\left(\frac{\omega}{2}\right)+A\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)\bar{H}\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)\right]e^{i\omega k}d\omega \tag{3.46}$$

同样

$$\langle u(t),\psi(t-k)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[A\left(\frac{\omega}{2}\right)\bar{G}\left(\frac{\omega}{2}\right)+A\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)\bar{G}\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)\right]e^{i\omega k}d\omega \tag{3.47}$$

由式(3.46)、式(3.47) 可知,式(3.45) 成立 $\Leftrightarrow$

$$\left.\begin{aligned} A(\omega)\bar{H}(\omega)+A(\omega+\pi)\bar{H}(\omega+\pi)=0 \\ A(\omega)\bar{G}(\omega)+A(\omega+\pi)\bar{G}(\omega+\pi)=0 \end{aligned}\right\},\ \forall\,\omega\in[0,\pi] \tag{3.48}$$

但式(3.43)、式(3.44) 和式(3.36) 的成立,表明矩阵

$$\begin{pmatrix} H(\omega) & G(\omega) \\ H(\omega+\pi) & G(\omega+\pi) \end{pmatrix} \tag{3.49}$$

是酉矩阵,从而式(3.48) 成立 $\Leftrightarrow A(\omega)=A(\omega+\pi)=0$,对 $\forall\,\omega\in[0,\pi]$。于是由 $\hat{u}(\omega) = A(\omega)\Phi(\omega)=0$ 可知 $u(t)\equiv 0$。

类似于定理 3.3,$G(\omega)$ 称为共轭镜像滤波器,有时也称为高通滤波器($G(0)=0$)。

在 3.2 节中说过,如果能找到一个 $\psi(t)$,它的平移系构成 W_0 的规范正交基,则利用 $\psi(t)$ 的伸缩性,$\{\psi_{j,k}(t)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 可构成 W_j 的规范正交基。进而利用 $L^2(\mathbf{R})$ 的小波空间分解式,可以得到 $L^2(\mathbf{R})$ 的规范正交基。现在有了定理 3.5,就可以由满足条件式(3.43) 和式(3.44) 的 $\psi(t)$ 来构造 W_0 的规范正交基。

3.4 $L^2(\mathbf{R})$ 的小波基的构造及示例

3.4.1 $L^2(\mathbf{R})$ 的正交小波基的构造方法

设$\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个 MRA,$\varphi(t)$ 是它的尺度函数。由 $\varphi(t)$ 构造 $\psi(t)$,进而构造 $L^2(\mathbf{R})$ 的小波基$\{\psi_{j,k}(t)\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$ 的方法:

(1) 由 $\varphi(t)$ 及式 $\Phi(2\omega)=H(\omega)\Phi(\omega)$,确定 $H(\omega)$;

(2) 取 $G(\omega)=e^{-i\omega}\bar{H}(\omega+\pi)$(显然这不是确定 $G(\omega)$ 的唯一方法,只要 $G(\omega)$ 满足式(3.43) 和式(3.44) 都可以,例如取 $G(\omega)=e^{i\omega}\bar{H}(\omega+\pi)$ 等;

(3) 由 $\Phi(\omega)$,$G(\omega)$ 及式 $\Psi(2\omega)=G(\omega)\Phi(\omega)$,确定 $\Psi(\omega)$;

(4) 由 $\Psi(\omega)$ 和逆 Fourier 变换确定 $\psi(t)$。

上述方法是在频域内进行的。容易验证,(2) 中所取的 $G(\omega)$ 满足式(3.43) 和式(3.44)。事实上,

$$H(\omega)\bar{G}(\omega)+H(\omega+\pi)\bar{G}(\omega+\pi)=H(\omega)H(\omega+\pi)e^{i\omega}+H(\omega+\pi)(-e^{i\omega}H(\omega))=0$$

式中,$H(\omega)$ 的周期是 2π。

$$\begin{aligned}|G(\omega)|^2+|G(\omega+\pi)|^2=&|H(\omega+\pi)|^2+|H(\omega+2\pi)|^2=\\&|H(\omega+\pi)|^2+|H(\omega)|^2=1\end{aligned}$$

同样,在时域中也有相应的方法:

(1) 由 $\varphi(t)$ 及双尺度方程式(3.19) 确定 $\{h_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$;

(2) 取 $g_n=(-1)^{1-n}\bar{h}_{1-n}$, $n\in\mathbf{Z}$;

(3) 由 $\varphi(t)$,$\{g_n\}$ 及双尺度方程式(3.40) 确定 $\psi(t)$。

在(2) 中,所取的$\{g_n\}$ 与频域中的 $G(\omega)$ 取法相对应:

$$\begin{aligned}G(\omega)=e^{-i\omega}\bar{H}(\omega+\pi)=&\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\omega}\sum_{k\in\mathbf{Z}}\bar{h}_k e^{i(\omega+\pi)k}=\\&\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_k(-1)^k\bar{h}_k e^{-i\omega(1-k)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n\in\mathbf{Z}}(-1)^{1-n}\bar{h}_{1-n}e^{-i\omega n}=\\&\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n g_n e^{-i\omega n}\end{aligned}$$

如果先考虑在时域中构造 $\psi(t)$,则要求 g_n 满足的条件与 $G(\omega)$ 满足的条件式(3.43) 和式(3.44) 等价(此处设 h_n,g_n 为实数)。

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{k\in\mathbf{Z}}h_k g_{k+2n}=0\\&\sum_{k\in\mathbf{Z}}g_k g_{k+2n}=\delta_{n,0},\quad\forall n\in\mathbf{Z}\end{aligned}\right\}\tag{3.50}$$

此时对 $\varphi(t)$ 在时域中的要求是:

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}}h_k h_{k+2n}=\delta_{n,0},\quad\forall n\in\mathbf{Z}\tag{3.51}$$

以上构造小波 $\psi(t)$ 的方法常简单说成是由 MRA 构造小波的方法。

3.4.2 构造小波的示例

例 3.1 构造 Haar 小波。

取尺度函数

$$\varphi(t)=\begin{cases}1, & t\in[0,1)\\0, & 其他\end{cases}$$

则
$$\Phi(\omega)=\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}}{\mathrm{i}\omega}$$

$$\Phi(2\omega)=\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\omega}}{2\mathrm{i}\omega}=\frac{1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}}{2}\,\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}}{\mathrm{i}\omega}=\frac{1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}}{2}\Phi(\omega)$$

$$H(\omega)=\frac{\Phi(2\omega)}{\Phi(\omega)}=\frac{1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}}{2}$$

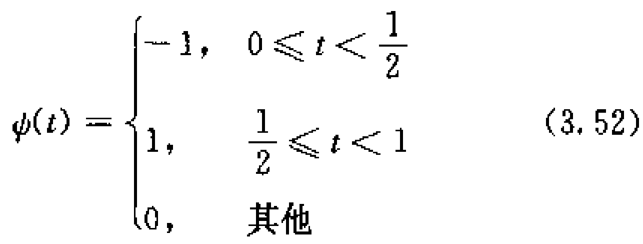
取
$$G(\omega)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}\bar{H}(\omega+\pi)=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}-1}{2}$$

由 $\Psi(\omega)=G\left(\frac{\omega}{2}\right)\Phi\left(\frac{\omega}{2}\right)$，可得

$$\Psi(\omega)=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}}-1}{2}\Phi\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$\psi(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}}\Phi\left(\frac{\omega}{2}\right)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}}-1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega=$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}}\Phi\left(\frac{\omega}{2}\right)\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2t-1)\frac{\omega}{2}}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}2t\cdot\frac{\omega}{2}}\right]\mathrm{d}\,\frac{\omega}{2}=$$
$$\varphi(2t-1)-\varphi(2t)$$

即



$$\psi(t)=\begin{cases}-1, & 0\leqslant t<\frac{1}{2}\\ 1, & \frac{1}{2}\leqslant t<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\tag{3.52}$$

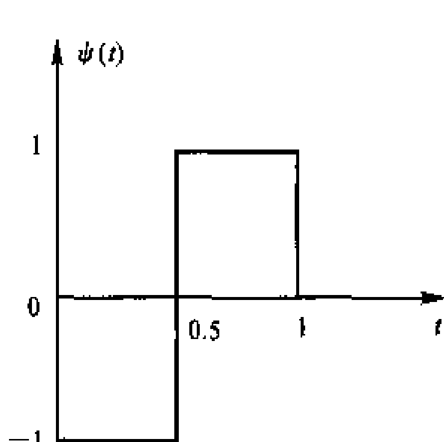


图 3.5　Haar 小波

同样，也可以在时域构造 $\psi(t)$。

取 $\varphi(t)$ 同前面一样，则 $\varphi(t)$ 的平移系 $\{\varphi(t-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 张成子空间

$$V_0=\left\{f(t)\mid f(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}c_k\varphi(t-k),\{c_k\}\in l^2\right\}$$

由 MRA 的伸缩性质，有

$$V_1=\left\{g(t)\mid g(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}d_k2^{-1/2}\varphi(2^{-1}t-k),\{d_k\}\in l^2\right\}$$

……

$$V_j=\left\{x(t)\mid x(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}e_k2^{-j/2}\varphi(2^{-j}t-k),\{e_k\}\in l^2\right\}$$

……

由双尺度方程式(3.19)，有

$$h_k = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\mathbf{R}} \varphi\left(\frac{t}{2}\right)\bar{\varphi}(t-k)\mathrm{d}t = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 1\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2}}, & k=0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\int_1^2 1\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2}}, & k=1 \\ 0, & k \text{ 为其他整数} \end{cases}$$

取 $g_n = (-1)^{1-n}\bar{h}_{1-n}, n \in \mathbf{Z}$,有

$$g_n = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2}}, & n=0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}, & n=1 \\ 0, & n \text{ 为其他整数} \end{cases}$$

由双尺度方程式(3.40),有

$$\psi(t) = \sqrt{2}\sum_{n\in \mathbf{Z}} g_n \varphi(2t-n) = -\varphi(2t) + \varphi(2t-1)$$

即得出 $\psi(t)$ 的表达式(3.52)。

例 3.2 构造 Shannon 小波。

取 $\varphi(t) = \frac{\sin\pi t}{\pi t}$,则 $\varphi(t)$ 的 Fouriér 变换(见式(1.41))为

$$\Phi(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \pi \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \tag{3.53}$$

由 $\Phi(2\omega) = H(\omega)\Phi(\omega)$,得

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} \leqslant |\omega| < \pi \end{cases}$$

取

$$G(\omega) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}\bar{H}(\omega+\pi) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}, & -\frac{3\pi}{2} < \omega < -\frac{\pi}{2} \\ 0, & -\frac{\pi}{2} \leqslant \omega < 0 \text{ 或 } -2\pi < \omega \leqslant -\frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

由 $\Psi(2\omega) = G(\omega)\Phi(\omega)$,得

$$\Psi(2\omega) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}, & -\pi < \omega < -\frac{\pi}{2} \text{ 或 } \frac{\pi}{2} < \omega < \pi \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$\Psi(\omega) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega/2}, & -2\pi < \omega < -\pi \text{ 或 } \pi < \omega < 2\pi \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

所以

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi}^{-\pi} e^{-i\omega/2} e^{i\omega t} d\omega + \int_{\pi}^{2\pi} e^{-i\omega/2} e^{i\omega t} d\omega =$$

$$\frac{\sin 2\pi\left(t-\frac{1}{2}\right) - \sin\pi\left(t-\frac{1}{2}\right)}{\pi\left(t-\frac{1}{2}\right)} \tag{3.54}$$

在上面的构造过程中，如果取 $G(\omega) = e^{i\omega}\overline{H}(\omega+\pi)$，则可得到

$$\psi(t) = \frac{\sin 2\pi\left(t+\frac{1}{2}\right) - \sin\pi\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\pi\left(t+\frac{1}{2}\right)} \tag{3.55}$$

由此可见，与一个尺度函数对应的小波函数并不唯一。

前面讨论的是由 MRA 的尺度函数 $\varphi(t)$ 出发来构造小波 $\psi(t)$，其基本过程可表示为：$\varphi(t) \to \{h_k\} \to H(\omega) \to G(\omega) \to \hat{\psi}(\omega) \to \psi(t)$，或者是，$\varphi(t) \to \{h_k\} \to \{g_n\} \to \psi(t)$。由于可以证明，任何尺度函数 $\varphi(t)$ 可以被共轭镜像滤波器的离散形式$\{h_k\}$所确定，因此在实际应用中，可以通过设计滤波器，由滤波器出发构造小波。这个问题将在第 4 章中讨论。

从这里可以看出滤波器（组）$\{h_k, g_k\}$ 或频域形式 $\{H(\omega), G(\omega)\}$ 的重要作用。由于 $\{H(\omega), G(\omega)\}$ 是 $\{\varphi(t), \psi(t)\}$ 对应的滤波器，$H(\omega) = \hat{\varphi}(2\omega)/\hat{\varphi}(\omega)$，$G(\omega) = \hat{\psi}(2\omega)/\hat{\varphi}(\omega)$，所以 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 的许多性质都可以通过 $H(\omega)$ 和 $G(\omega)$ 在频率域上反映出来。因此常常需要把同样的一个问题从两个不同的方面来考虑，一方面考虑尺度函数和小波，另一方面考虑它们对应的滤波器。

3.5 Mallat 算法

3.5.1 小波级数和函数的多尺度逼近

由 2.3 节及 3.3～3.5 节的讨论可知，给定一个 MRA 以后，$L^2(\mathbf{R})$ 可以分解为两个子空间序列，即

$$L^2(\mathbf{R}) = \overline{\bigcup_{j\in \mathbf{Z}} V_j} = \lim_{j\to -\infty} V_j \tag{3.56}$$

$$L^2(\mathbf{R}) = \bigoplus_{j\in \mathbf{Z}} W_j \tag{3.57}$$

$\{\varphi_{j,k}(t)\}_{j,k\in \mathbf{Z}}$，$\{\psi_{j,k}(t)\}_{j,k\in \mathbf{Z}}$ 分别是尺度空间 V_j 和小波空间 W_j 的规范正交基。

式(3.56) 表明，对于充分大的 $J(J=-j)$，有 $L^2(\mathbf{R}) \approx V_{J_0}$。此时，对 $\forall f(t) \in L^2(\mathbf{R})$ 有

$$f(t) \approx f_{V_J}(t) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \langle f, \varphi_{J,k} \rangle \varphi_{J,k}(t) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_{J,k} \varphi_{J,k}(t) \tag{3.58}$$

式中，f_{V_J} 表示 f 在 V_J 中的投影，有时将 f_{V_J} 也写成 f_J。

式(3.57)表明，对 $\forall f(t) \in L^2(\mathbf{R})$，有

$$f(t) = \sum_{j,k \in \mathbf{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}(t) = \sum_{j,k \in \mathbf{Z}} d_{j,k} \psi_{j,k}(t) \tag{3.59}$$

式中，$d_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle, j, k \in \mathbf{Z}$ 是 $f(t)$ 的离散小波变换，也称为正交离散小波变换。

式(3.59)称为 $f(t)$ 的小波级数，也称为 $f(t)$ 的正交小波分解，同时也可以看成是 $f(t)$ 的重构公式。

然而，利用式(3.59)重构 $f(t)$ 是不可能的，因为我们不能求出无穷多个不同尺度的小波系数 $\{d_{j,k}\}_{j,k \in \mathbf{Z}}$。由于在实际问题中，仪器所记录的信号总是只有有限的频率，因而我们总可以假设 V_0 是具有最高频率的函数空间，所以有 $f(t) \in V_0$。如果这个条件不成立，由前面的讨论知，可设 $f \approx f_{V_0}$。由于

$$V_0 = V_1 \oplus W_1 = V_2 \oplus W_2 \oplus W_1 = \cdots = V_J \oplus W_J \oplus W_{J-1} \oplus \cdots \oplus W_1 \tag{a}$$

式(a)中，第一个等号表示 V_1 的频率范围恰是 V_0 的一半，即 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$，且是 V_0 的低频部分；而 W_1 的频率范围是 V_1 与 V_0 之间的部分，即 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$，是一个有限频带，通常称为 V_0 的高频部分或"细节"。第 J 个等式表示频率范围从 2^{-J} 到 2^0 进行了 J 次小波分解，V_J 的频率范围是 $\left[0, \frac{1}{2^J}\right]$，$W_J$ 的频率范围是 $\left[\frac{1}{2^J}, \frac{1}{2^{J-1}}\right]$，…，$W_1$ 的频率范围是 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$；$W_J$ 的频带是互不重叠的，它表现了不同频带中的"细节"。V_J 是 V_0 中的低频部分，表现了 V_0 的"概貌"。

所以

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_{0,k} \varphi_{0,k}(t) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_{J,k} \varphi_{J,k}(t) + \sum_{i=1}^{J} \sum_{k \in \mathbf{Z}} d_{i,k} \psi_{i,k}(t) =$$

$$f_J(t) + \sum_{i=1}^{J} g_i(t), \quad J \geqslant 1 \tag{3.60}$$

其中

$$\begin{cases} c_{J,k} = \langle f, \varphi_{J,k} \rangle, & k \in \mathbf{Z} \quad (3.61) \\ d_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle, & k \in \mathbf{Z} \quad (3.62) \end{cases}$$

如同前面对空间分解说明一样，式(3.60)中的 $f_J(t) = \sum_k c_{J,k} \varphi_{J,k}(t)$ 是 $f(t)$ 在尺度 J 下的一种逼近，是 $f(t)$ 的第 J 级"模糊像"。它表示的是 $f(t)$ 的频率不超过 2^{-J} 的成分。式(3.60)中的 $g_i(t) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} d_{i,k} \psi_{i,k}(t)$ 是 $f(t)$ 的频率在 2^{-i} 到 2^{-i+1} 之间的细节成分，也是

$f(t)$ 在 W_j 空间的正交投影 $f_{W_j}(t)$。

式(3.61) 称为 $f(t)$ 的离散逼近，式(3.62) 称为 $f(t)$ 的离散细节，也就是 f 的离散小波变换。

3.5.2　利用滤波器实现小波变换快速算法

这里的快速算法是指 Mallat 提出的计算 $c_{j,k}$ 和 $d_{j,k}$ 的算法。

如果已经确定了 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$，那么要想知道 $f(t)$ 的各种尺度逼近 $f_j(t)$ 和在尺度 j 下的细节，由式(3.60) 可知，只需要知道$\{c_{j,k}\}_{k\in \mathbf{Z}}$ 和$\{d_{j,k}\}_{k\in \mathbf{Z}}$。下面是其计算公式的推导。

由于 $V_{j+1}\subset V_j, V_j=V_{j+1}\oplus_{j+1}$，因此任一 $f(t)\in V_j$，可以用基$\{\varphi_{j,k}\}$ 表示，又可以用基$\{\varphi_{j+1,k},\psi_{j+1,k}\}$ 来表示：

$$f=\sum_n c_{j,n}\varphi_{j,n}=\sum_k c_{j+1,k}\varphi_{j+1,k}+\sum_k d_{j+1,k}\psi_{j+1,k} \tag{3.63}$$

因为 $V_{j+1}\perp W_{j+1}$，所以由式(3.63) 可得

$$c_{j+1,k}=\langle\sum_n c_{j,n}\varphi_{j,n},\varphi_{j+1,k}\rangle=\sum_n c_{j,n}\langle\varphi_{j,n},\varphi_{j+1,k}\rangle$$

而

$$\langle\varphi_{j,n},\varphi_{j+1,k}\rangle=\frac{2^{-j}}{\sqrt{2}}\int_{\mathbf{R}}\varphi\left(\frac{t}{2^j}-n\right)\bar{\varphi}\left(\frac{t}{2^{j+1}}-k\right)\mathrm{d}t=\quad(令\ x=\frac{t}{2^j}-n)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\mathbf{R}}\varphi(x)\bar{\varphi}\left(\frac{x}{2}+\frac{n}{2}-k\right)\mathrm{d}x$$

由双尺度方程

$$\varphi\left(\frac{x}{2}\right)=\sqrt{2}\sum_m h_m\varphi(x-m)$$

有

$$\varphi\left(\frac{x}{2}+\frac{n}{2}-k\right)=\sqrt{2}\sum_m h_m\varphi(x+n-2k-m)$$

代入上式，得

$$\langle\varphi_{j,n},\varphi_{j+1,k}\rangle=\sum_m\bar{h}_m\int_{\mathbf{R}}\varphi(x)\bar{\varphi}[x-(m-n+2k)]\mathrm{d}x=\bar{h}_{n-2k} \tag{3.64}$$

从而有

$$c_{j+1,k}=\sum_{n\in\mathbf{Z}}c_{j,n}\bar{h}_{n-2k},\qquad k\in\mathbf{Z} \tag{3.65}$$

同理有

$$d_{j+1,k}=\sum_{n\in\mathbf{Z}}c_{j,n}\bar{g}_{n-2k},\qquad k\in\mathbf{Z} \tag{3.66}$$

式(3.65) 和式(3.66) 即是 Mallat 快速分解算法。从公式中可以看出，只要知道滤波器$\{h_n\}$ 和$\{g_n=(-1)^{1-n}\bar{h}_{1-n}\}$，由初始序列$\{c_0,n\}$，就可以算出所有尺度系数$\{c_{j,k}\}$ 和小波系数

$\{d_{j,k}\}$，其过程可用图 3.6 表示。

$$\begin{array}{ccccccccc} \{c_{0,k}\} & \rightarrow & \{c_{1,k}\} & \rightarrow & \{c_{2,k}\} & \rightarrow \cdots & \{c_{J-1,k}\} & \rightarrow & \{c_{J,k}\} \\ & \searrow & \{d_{1,k}\} & \searrow & \{d_{2,k}\} & & & \searrow & \{d_{J,k}\} \end{array}$$

图 3.6　分解算法示意图

如果已知分解后的系数 $\{c_{J,n}\}$ 及 $\{d_{J,n}\}$，要重建原来分解前的系数 $\{c_{0,n}\}$，则由上面的逆过程容易得到重构公式：

$$c_{j,k}=\sum_{n\in\mathbf{Z}}c_{j+1,n}h_{k-2n}+\sum_{n\in\mathbf{Z}}d_{j+1,n}g_{k-2n},\qquad k\in\mathbf{Z} \tag{3.67}$$

这个公式的推导并不困难。仍从式(3.63)出发，可得

$$c_{j,k}=\sum_{n}\langle c_{j+1,n}\varphi_{j+1,n},\varphi_{j,k}\rangle+\sum_{n}\langle d_{j+1,n}\psi_{j+1,n},\varphi_{j,k}\rangle=$$
$$\sum_{n}c_{j+1,n}\langle\varphi_{j+1,n},\varphi_{j,k}\rangle+\sum_{n}d_{j+1,n}\langle\psi_{j+1,n},\varphi_{j,k}\rangle$$

类似式(3.64)，有

$$\langle\varphi_{j+1,n},\varphi_{j,k}\rangle=h_{k-2n}$$
$$\langle\psi_{j+1,n},\varphi_{j,k}\rangle=g_{k-2n}$$

代入上式，即得式(3.67)。

此重构过程如图 3.7 所示。

$$\begin{array}{ccccccc} \{c_{J,k}\} & \rightarrow & \{c_{J-1,k}\} & \rightarrow \cdots & \{c_{1,k}\} & \rightarrow & \{c_{0,k}\} \\ \{d_{J,k}\} & \nearrow & \{d_{J-1,k}\} & \nearrow & \{d_{1,k}\} & \nearrow & \end{array}$$

图 3.7　重构算法示意图

再来分析一下 Mallat 的分解式(3.65)、式(3.66)及重构式(3.67)。在推导 Mallat 分解公式以前，先假设了 $\varphi(t)$，$\psi(t)$ 已知。而从上述几个公式来看，如果能从其他途径找到或构造出滤波器组 $\{h_k,g_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$，则完全不必知道 $\varphi(t)$ 与 $\psi(t)$，就能从初始系数 $\{c_{0,k}\}$ 出发，直接应用 Mallat 算法得到分解系数 $\{c_{j,k}\}$，$\{d_{j,k}\}$，或者利用已知的分解系数 $\{c_{J,k}\}$，$\{d_{J,k}\}$ 直接重构 $f(t)$。这就是 Mallat 算法被广泛应用的原因。在实际中，有些常用的小波基根本没有解析表达式，只有滤波器 $\{h_k\}$。目前已有很多被构造出的滤波器 $\{h_k\}$ 和 $\{g_k\}$，供实际工作者选用。

从 Mallat 计算公式(3.65)、式(3.66)及式(3.67)来看，可以表示成矩阵运算等式，从而算法结构很清楚。但当序列 $\{c_{i,k}\}$ 较长时，矩阵维数很高，所占空间也就很大。在实际中，由于卷积运算有现成软件支持，所以下面把 Mallat 计算公式写成卷积形式，以便容易在计算机上实现。

离散卷积公式定义如下：

$$f * g[k] = \sum_n f[n]g[k-n]$$

为了表示更清楚，习惯上把序列下标号写在[ ]内。先引入下面的记号：

记
$$x^-[n] = x[-n],$$

记
$$\check{x}[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{2}\right], & n\text{ 为偶数} \\ 0, & n\text{ 为奇数} \end{cases}$$

$\check{x}[n]$ 是 $x[n]$ 的插零函数。这样，分解公式就可以写成卷积运算形式（这里设 $\{h[n], g[n]\}$ 为实数序列）：

$$c_{j+1}[k] = \sum_n c_j[n]h^-[2k-n] = c_j * h^-[2k], \quad k \in \mathbf{Z} \tag{3.68}$$

$$d_{j+1}[k] = \sum_n c_j[n]g^-[2k-n] = c_j * g^-[2k], \quad k \in \mathbf{Z} \tag{3.69}$$

类似地，利用卷积的可交换性，重构公式写成

$$c_j[k] = \check{c}_{j+1} * h[k] + \check{d}_{j+1} * g[k], \quad k \in \mathbf{Z} \tag{3.70}$$

式(3.68)、式(3.69)表明，$c_{j+1}[k]$ 和 $d_{j+1}[k]$ 可由 $c_j[n]$ 分别与 $h^-[n]$ 和 $g^-[n]$ 作卷积（可理解为滤波）后再每隔一项作采样得到，如图 3.8 所示。

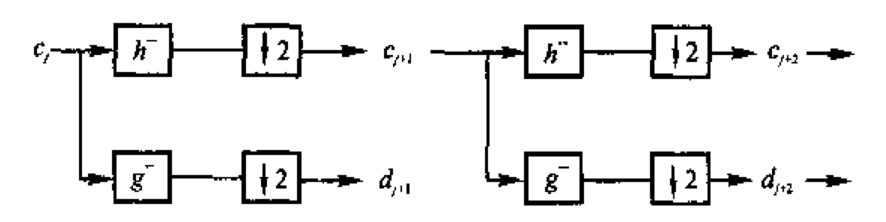


图 3.8　小波分解卷积算法流程图

图 3.8 中 $\boxed{h^-}$ 和 $\boxed{g^-}$ 分别表示低通和高通滤波器。由此看来，Mallat 分解算法实际上是对信号 $\{C_{j,k}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 作一系列的低通滤波和高通滤波后，把信号分解到一个低频带和若干个高频带频率域上。

式(3.70)表明，将 $c_{j+1}[n]$ 与 $d_{j+1}[n]$ 每两项之间插入一个零后，再分别与 $h[n]$ 和 $g[n]$ 作卷积，如图 3.9 所示，即可得到 $c_j[k]$。

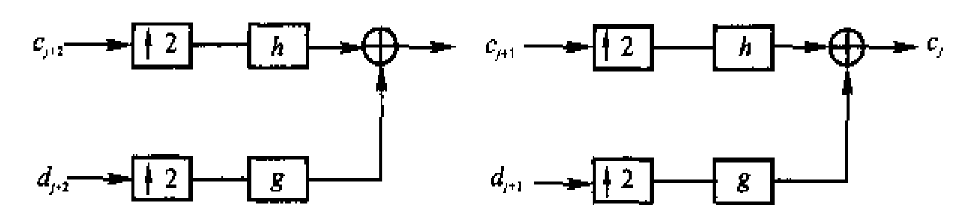


图 3.9　小波重构卷积算法流程图

3.5.3 初始序列$\{c_{0,k}\}$的计算

在实际应用中，设输入信号$f(t)\in L^2(\mathbf{R})$，但无法确定$f(t)$属于哪个尺度空间V_j，所以只能用$f(t)$在V_j中的投影来近似表示$f(t)$：

$$f(t)\approx f_{V_j}(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\langle f,\varphi_{j,k}\rangle\varphi_{j,k}(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}c_{j,k}\varphi_{j,k}(t) \tag{3.71}$$

显然$f_{V_j}\in V_j$，所以可以从V_j空间开始对$f(t)$进行小波分解，$c_{j,k}=\langle f,\varphi_{j,k}\rangle$作为初始序列，代入分解公式。对$c_{j,k}$的选取非常重要，因为它决定着Mallat算法的精度。下面给出一种简单的选取方法。想进一步了解其他方法的读者，可参阅文献[7,9]。

在实际中，研究信号时总是先对信号$f(t)$进行采样。设采样间隔$T=\frac{1}{N}$，不妨将T单位化，记$T=1$，这样得到一系列的样本值$\{f[k]\}$。引入单位脉冲

$$\delta[t]=\begin{cases}1, & 0\leqslant t<T\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{3.72}$$

于是

$$f(t)\approx\sum_k f(k)\delta(t-k) \tag{3.73}$$

当采样间隔充分小，$\varphi(t)$满足一定条件时（例如，见习题6），其性质类似于$\delta(t)$，于是在式(3.73)中用$\varphi(t-k)$代替$\delta(t-k)$，有

$$f(t)\approx\sum_{k\in\mathbf{Z}}f(k)\varphi(t-k) \tag{3.74}$$

比较式(3.71)与式(3.74)，可知取

$$c_{0,k}=f(k),\qquad k\in\mathbf{Z} \tag{3.75}$$

由于实际中所有由仪器记录的信号总是频率有限的信号，故总可以假设式(3.71)中的$V_j=V_0$，即V_0是具有最高频率（最精细的细节）的函数空间。这样，式(3.75)中的$c_{0,k}=f(k)$也是很自然的。

$f(t)$在V_j中的投影，即$f(t)$在尺度j下的逼近式为

$$f_j(t=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\langle f,\varphi_{j,k}\rangle\varphi_{j,k}(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}c_{j,k}2^{-j/2}\varphi(2^{-j}t-k) \tag{3.76}$$

令$t=2^jk$，可得

$$f_j(2^jk)=2^{-j/2}c_{j,k}\qquad k\in\mathbf{Z} \tag{3.77}$$

这便是$f(t)$在j尺度下的数值逼近形式，其中$c_{j,k}$由Mallat算法公式(3.65)确定。由于

$$f_{j-1}(t)=f_j(t)+g_j(t)$$

所以，$f_j(t)$相对于$f_{j-1}(t)$余下的细节

$$g_j(t=\sum_{k\in\mathbf{Z}}d_{j,k}\psi_{j,k}(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}d_{j,k}2^{-j/2}\psi(2^{-j}t-k)=$$

$$\sum_{k\in Z} 2^{-j/2} d_{j,k} \cdot \sqrt{2} \sum_{l\in Z} g_l \varphi(2^{-(j-1)} t - 2k - l) =$$
$$\sum_{n\in Z} \Big(\sum_{k\in Z} 2^{-(j-1)/2} d_{j,k} g_{n-2k} \Big) \varphi(2^{-(j-1)} t - n)$$

令 $t = 2^{j-1} n$，得

$$g_j(2^{j-1} n) = 2^{-(j-1)/2} \sum_{k\in Z} d_{j,k} g_{n-2k}, \qquad n \in \mathbf{Z} \tag{3.78}$$

这就是 $\{f_j(2^j k)\}_{k\in Z}$ 相对于 $\{f_{j-1}(2^{j-1} k)\}_{k\in Z}$ 的剩余细节的数值形式，式中 $d_{j,k}$ 由式(3.66)计算。

值得注意的是，上述初始序列 $c_{0,k}$ 的确定，对于小波分解后的作图是很有利的，但不能用于时频分析作图。

3.5.4　用卷积实现 Mallat 算法的技术细节

在图 3.8 和图 3.9 中，符号"$\downarrow 2$"表示向下抽样，即在离散序列 $\{x[k]\}$ 中，每隔一个点取一个点。例如，

$x[k]$：　$\cdots, x[-2], x[-1], x[0], x[1], x[2], \cdots$

$x[2k] = \downarrow 2x[k]$：　$\cdots, x[-2], x[0], x[2], x[4], \cdots$

而符号"$\uparrow 2$"表示向上抽样，它与插零函数 $\check{x}[k]$ 表示的意义相同，即在离散序列 $x[k]$ 中，每两点之间插入一个"0"，例如，

$x[k]$：　$\cdots, x[-2], x[-1], x[0], x[1], x[2], \cdots, x[k], \cdots$

$\check{x}[k] = \uparrow 2x[k]$：　$\cdots, x[-2], 0, x[-1], 0, x[0], 0, x[1], \cdots, 0, x[k], 0, \cdots$

(1) 分解算法。

1) 分解算法的输入、输出。

输入：采样信号 $f[n], n = 0, 1, \cdots, L-1 (L = 2^i)$，共轭镜像滤波器 $h[n]$(设长度为 l)。

输出：J 次小波分解系数和最大尺度系数：

$$d_1[k] \quad \left(k = 0, 1, \cdots, \frac{L}{2} - 1\right)$$

$$d_2[k] \quad \left(k = 0, 1, \cdots, \frac{L}{2^2} - 1\right)$$

……

$$d_J[k] \quad \left(k = 0, \cdots, \frac{L}{2^J} - 1\right)$$

$$c_J[k] \quad \left(k = 0, \cdots, \frac{L}{2^J} - 1\right)$$

2) 分解算法的计算步骤。

第 1 步：由 $h[n]$ 算出高通滤波器：

$$g[n]=(-1)^{1-n}h[1-n] \qquad (\text{长度也是 } l)$$

注意，当 h 的下标出现负数时，可利用移位方法消除负数。

第 2 步：求出 $h[n]$ 和 $g[n]$ 的反射 $h^{-}[n]$ 和 $g^{-}[n]$（h^{-} 和 g^{-} 正好是 h 和 g 的逆序）。

第 3 步：令 $c_0[n]=\{f[0],f[1],\cdots,f[L-1]\}$，置 $j=0$。

第 4 步：由卷积公式 $c_{j+1}\left[\frac{k}{2}\right]=c_j * h^{-}[k]$ 算出低通分量 $c_{j+1}\left[\frac{k}{2}\right]$；

由卷积公式 $d_{j+1}\left[\frac{k}{2}\right]=c_j * g^{-}[k]$ 算出高通分量 $d_{j+1}\left[\frac{k}{2}\right]$。

第 5 步：对 $c'_{j+1}\left[\frac{k}{2}\right]$ 和 $d_{j+1}\left[\frac{k}{2}\right]$ 分别删除前 $l-1$ 个元素，再向下抽样（$\downarrow 2$），得到低通分量 $c_{j+1}[k]$ 和高通分量 $d_{j+1}[k]$。（至此完成一层小波分解）

第 6 步：若 $j<L-1$，置 $j=j+1$，转第 4 步。否则，停止。得到分解序列

$$d_1[0],\cdots,d_1\left[\frac{L}{2}-1\right];\cdots;d_J[0],\cdots,d_J\left[\frac{L}{2^J}-1\right];$$

$$c_J[0],\cdots,c_J\left[\frac{1}{2^J}-1\right]$$

附注：由卷积运算可知，当序列 f 的长度为 L，序列 g 的长度为 l 时，卷积后的长度为 $L+l-1$。它比 f 的长度多了 $l-1$ 个。所以在第 5 步中删去了 $l-1$ 个元素。至于删去前边 $l-1$ 个元素还是最后 $l-1$ 个元素，与卷积运算实现时的顺序有关。这里删去前边的 $l-1$ 个元素，是基于用 Matlab 软件实现卷积运算。

(2) 重构算法。

1) 重构算法的输入、输出。

输入：共轭镜像滤波器 $h[n]$（长度为 l），J 次分解小波系数和最低层尺度系数为

$$d_1[k] \quad \left(k=0,1,\cdots,\frac{L}{2}-1\right)$$

$$d_2[k] \quad \left(k=0,1,\cdots,\frac{L}{4}-1\right)$$

$$d_J[k] \quad \left(k=0,1,\cdots,\frac{L}{2^J}-1\right)$$

……

$$c_J[k] \quad \left(k=0,1,\cdots,\frac{L}{2^J}-1\right)$$

及重构信号的长度 L。

输出：重构信号 $\tilde{f}[n] \quad (n=0,1,\cdots,L-1)$。

2) 重构算法的计算步骤。

第 1 步：由低通滤波器 $h[n]$ 算出高通滤波器：

$$g[n]=(-1)^{1-n}h[1-n],\qquad (\text{长度}=l)$$

第 2 步：长度 $L:=L/2^J$。

第 3 步：取出第 J 层分解的高通分量 $d_J[n]$$(n=0,\cdots,L-1)$ 及低通分量 $c_J[n]$$(n=0,\cdots,L-1)$，进行插零，算出 $\check{C}_J$ 及 $\check{D}_J$$(C_J=c_J[k],D_J=d_J[k])$，置 $j=J$。

第 4 步：由公式

$$c_{j-1}[k]=h*\check{c}_j[k]+g*\check{d}_j[k]$$

计算出上一层的低通分量 $c_{j-1}[k]$（删除 $l-1$ 个边界元素）。

第 5 步：若 $j>1$，置 $J=j-1$，返回步骤 3；否则，停止。得到重构信号 $\tilde{f}[n]$$(n=0,1,\cdots,L-1)$。

在上面的算法实现中，当信号的长度有限时，在边界点上不可避免地会产生误差。为保证对原信号的分解与重构是精确实现的，常采取一种边界延拓的方法。所谓边界延拓，就是增加信号的长度，将边界延拓到原信号之外。常用的边界延拓的方法有：

(1) 零延拓；

(2) 光滑常数延拓；

(3) 对称延拓；

(4) 周期延拓。

设原信号 $c[k]$ 的长度为 n，即 $k=0,1,\cdots,n-1$（常取 $n=2^P,P\in\mathbf{N}$），又设滤波器长度为 l，每次分解只需在原信号左右两边延拓 $\lceil\frac{l}{2}\rceil$ 个元素。

(1) 零延拓。

原信号：$\{c_0,c_1,\cdots,c_{n-1}\}$

延拓后信号：$\{\underbrace{0,\cdots,0}_{\lceil\frac{l}{2}\rceil},c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},\underbrace{0,\cdots,0}_{\lceil\frac{l}{2}\rceil}\}$。

(2) 光滑常数延拓。

延拓信号：$\{\underbrace{c_0,\cdots,c_0}_{\lceil\frac{l}{2}\rceil},c_0,\cdots,c_{n-1},\underbrace{c_{n-1},\cdots,c_{n-1}}_{\lceil\frac{l}{2}\rceil}\}$。

(3) 对称延拓。

延拓后信号（当 l 是偶数时）：$\{c_{\lceil\frac{l}{2}\rceil-1},\cdots,c_0,c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_{n-1},\cdots,c_{n-\lceil\frac{l}{2}\rceil}\}$

延拓后信号（当 l 是奇数时）：$\{c_{\lceil\frac{l}{2}\rceil},\cdots,c_1,c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_{n-2},c_{n-3},\cdots,c_{n-\lceil\frac{l}{2}\rceil-1}\}$

这种方法等效于在信号的边界点上作对称折叠。

(4) 周期延拓。

延拓后的信号：$\{c_{n-\lceil\frac{l}{2}\rceil},\cdots,c_{n-1},c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_0,c_1,\cdots,c_{\lceil\frac{l}{2}\rceil-1}\}$

这种方法，等效于把信号变成循环信号。

以上的延拓方法中，对称延拓和周期延拓最常用，它们能够保证信号的精确重构。在图像处理中，一般使用对称延拓。

小　结

构造函数空间 $L^2(\mathbf{R})$ 的小波基，将函数 $f(t)\in L^2(\mathbf{R})$ 在这个基下展开（即用基线性表示），对于研究 $f(t)$（信号）的性质或寻找 $f(t)$ 的一个逼近有着重要的实际意义。

本章主要研究 $L^2(\mathbf{R})$ 的正交小波基的构造问题。

(1) $L^2(\mathbf{R})$ 中的多分辨分析(MRA)的概念是一个基本概念，应当充分地理解和熟悉。

由 MRA 所确定的 $L^2(\mathbf{R})$ 的空间分解式

$$V_{j-1}=V_j\oplus W_j \tag{1}$$

$$L^2(\mathbf{R})=\bigoplus_{j=-\infty}^{+\infty}W_j \tag{2}$$

是两个基本公式，它们给出了正交小波基的构造框架：由 V_0 的正交基 $\varphi_{0,k}$ 出发，经伸缩构造 V_j 的正交基 $\varphi_{j,k}$，再利用式(1)，由 $\varphi_{j-1,k}$ 构造 W_j 的正交小波基 $\psi_{j,k}$。在这个过程中，双尺度方程式(3.19)和式(3.40)，即

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\varphi\left(\dfrac{t}{2}\right)=\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}}h_k\varphi(t-k) & (3)\\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{2}}\psi\left(\dfrac{t}{2}\right)=\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}}g_k\varphi(t-k) & (4)\end{cases}$$

起着非常重要的作用，它们是小波理论中最基本的公式之一。此外，双尺度方程还给出了一个重要信息：可以利用已知的 $\{h_k\}$ 来确定 $\varphi(t)$，这给小波理论的实际应用带来了方便。

(2) 构造正交小波基的尺度函数 φ 和小波 ψ 应满足的性质或条件，在频域中，它们就是定理 3.1、定理 3.2、定理 3.3、定理 3.4 和定理 3.5。这些定理中的几个主要条件，即式(3.36)、式(3.43)和式(3.44)可以简述为：

$\varphi(t)$ 是尺度空间 V_j 的规范正交基，$\psi(t)$ 是 W_j（V_j 在 V_{j-1} 中的正交补）的规范正交基，其充要条件是矩阵

$$\begin{bmatrix}H(\omega) & G(\omega)\\ H(\omega+\pi) & G(\omega+\pi)\end{bmatrix} \tag{5}$$

是酉矩阵。

(3) 式(3.34)和式(3.42)，即

$$\left.\begin{aligned}H(\omega)&=\hat{h}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in\mathbf{Z}}h_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega} &(6)\\ G(\omega)&=\hat{g}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in\mathbf{Z}}g_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega} &(7)\end{aligned}\right\}$$

也是最常用的公式之一，它们分别称为$\{h_k\}$和$\{g_k\}$的离散Fourier变换，又称为φ和ψ对应的滤波器，记为$\{H(\omega),G(\omega)\}$或$\{h_k,g_k\}$。前者是频域形式，后者是时域（离散）形式。

对φ和ψ在时域中应满足的条件，可以通过公式(6)和(7)，变成

$$\left.\begin{aligned}\sum_k h_k h_{k+2n} &= \delta_{n,0}\\ \sum_k h_k g_{k+2n} &= 0\\ \sum_k g_k g_{k+2n} &= \delta_{n,0}\end{aligned}\right\},\quad n\in\mathbf{Z} \tag{8}$$

(4) 3.4节给出了构造$L^2(\mathbf{R})$中正交小波基的方法，其基本过程是：

在频域中：$\varphi(t)\rightarrow\{h_k\}\rightarrow H(\omega)\left(=\dfrac{\hat{\varphi}(2\omega)}{\hat{\varphi}(\omega)}\right)\rightarrow G(\omega)(=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}\bar{H}(\omega+\pi))\rightarrow\psi(t)$；

在时域中：$\varphi(t)\rightarrow\{h_k\}\rightarrow\{g_n=(-1)^{1-n}h_{1-n}\}\rightarrow\psi(t)$。

在实际应用中，由于$\varphi(t)$可由共轭正交滤波器$\{h_k\}$来确定，所以可以通过设计滤波器来构造小波基，这些方法将在第4章中讨论。

(5) 快速小波分解与重构算法，主要利用滤波器$\{h_k,g_k\}$由下面的公式来实现：

分解算法公式

$$\left.\begin{aligned}c_{j+1,k} &= \sum_n c_{j,n}\bar{h}_{n-2k}\\ d_{j+1,k} &= \sum_n c_{j,n}\bar{g}_{n-2k}\end{aligned}\right\},\qquad k\in\mathbf{Z} \tag{9}$$

重构算法公式

$$c_{j,k}=\sum_n c_{j+1,n}h_{k-2n}+\sum_n d_{j+1,n}g_{k-2n},\qquad k\in\mathbf{Z} \tag{10}$$

初始序列$\{c_{0,k}\}$的选择很重要。本章给出了一种常用的形式（见式(3.75)）：

$$c_{0,k}=f(k),\qquad k\in\mathbf{Z} \tag{11}$$

把V_0看做具有最高频率的空间，利用已选取的$\{c_{0,k}\}$及分解算法公式式(9)，可得$f(t)$在尺度j下的数值逼近形式：

$$\{f_j(2^j k)=2^{-j/2}c_{j,k}\},\qquad k\in\mathbf{Z} \tag{12}$$

及f_j在V_{j-1}中的剩余细节的数值形式：

$$g_j(2^{j-1}n)=2^{-(j-1)/2}\sum_k d_{j,k}g_{n-2k} \tag{13}$$

这些数据可用于$f(t)$经小波分解后的作图。

在应用中，由于有软件的支持，Mallat算法常用卷积实现，其技术细节详见3.5.4段。

习　题

1. 证明Shannon采样定理：

若 $f\in L^2(\mathbf{R})$ 且 $\hat{f}(\omega)$ 具有紧支集，即 $\mathrm{supp}\hat{f}=[-\Omega,\Omega]$，则对于 $f(t)$ 的一组采样值 $f(kT)(k\in\mathbf{Z},T=\frac{\pi}{\Omega}$ 为采样周期)，有

$$f(t)=\sum_k f(kT)\frac{\sin\Omega(t-kT)}{\Omega(t-kT)}$$

并说明上式的意义。

2. 证明正交 MRA 的伸缩性：$f(t)\in V_j\Leftrightarrow f(2t)\in V_{j-1},\forall j\in\mathbf{Z}$。

3. $L^2(\mathbf{R})$ 中的 Riesz 基与标准正交基有什么不同，能否用式(3.18)将 Riesz 基化为标准正交基。

4. 证明式(3.50)。

5. 证明式(3.51)。

6. 在下列情形下证明式(3.75)：

设 φ 是正交 MRA 的尺度函数，满足$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\mathrm{d}t=1$且是紧支集的，$f\in L^2(\mathbf{R})$ 是连续函数。当采样间隔 $T=\frac{1}{2^N}$ 充分小时，有

$$c_{0,k}=f(kT)$$

7. 设 φ 与 ψ 是 Haar 尺度函数和小波，V_j 与 W_j 分别是由 $\varphi_{j,k}(t)$ 和 $\psi_{j,k}(t)(k\in\mathbf{Z})$ 张成的空间。设 $f(t)=\sum_k a_k\varphi(2t-k)\in V_{-1}$，证明：若 f 与 $\varphi(t-l)\in V_0(l\in\mathbf{Z})$ 正交，则对每个 l，有 $a_{2l+1}=-a_{2l}$，且有

$$f(t)=\sum_{l\in\mathbf{Z}}a_{2l}\psi(t-l)\in W_0$$

第4章 紧支集小波

在Mallat算法的公式(3.65)、式(3.66)和式(3.67)中,求和一般是无穷多项的。而在实际计算时必须截断,这样就会引起误差。此外,在对信号进行时-频局部分析时,总希望小波是紧支集的。可以证明,当尺度函数 $\varphi(t)$ 是紧支集时,对应的滤波器 $\{h_k\}$ 只有有限多项是非零的,反之也成立。在3.4节中,讨论了由尺度函数 $\varphi(t)$ 构造小波基的问题,本章主要讨论由共轭镜像滤波器构造紧支集正交小波基的问题。

4.1 滤波器的性质

本节讨论由滤波器构造尺度函数和小波函数时,滤波器应满足的条件及方法。设

$$H(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in\mathbf{Z}}h_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega k},\qquad \{h_k\}\in l^1 \tag{4.1}$$

$$G(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in\mathbf{Z}}g_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega k},\qquad \{g_k\}\in l^1 \tag{4.2}$$

式中,$H(\omega)$,$G(\omega)$ 是共轭正交滤波器的频域形式,$\{h_k\}$ 和 $\{g_k\}$ 是滤波器在时域上的形式。

4.1.1 充分条件

1. 充分条件1

由 $H(\omega)$ 构造 $L^2(\mathbf{R})$ 正交多分辨分析的尺度函数 $\varphi(t)$,$H(\omega)$ 应满足

(1) $|H(\omega)|^2+|H(\omega+\pi)|^2=1$; (4.3)

(2) $H(0)=1$; (4.4)

(3) $H(\omega)\neq 0$,当 $\omega\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$。 (4.5)

当给定 $H(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in\mathbf{Z}}h_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega k}$ 时,可由 $\{h_k\}$ 写出双尺度方程

$$\varphi(t)=\sqrt{2}\sum_{k\in\mathbf{Z}}h_k\varphi(2t-k) \tag{4.6}$$

进而有

$$\Phi(\omega)=H\left(\frac{\omega}{2}\right)\Phi\left(\frac{\omega}{2}\right) \tag{4.7}$$

反复使用式(4.7)作迭代,可得

$$\Phi(\omega)=\prod_{j=1}^{n}H\left(\frac{\omega}{2^j}\right)\Phi\left(\frac{\omega}{2^n}\right) \tag{4.8}$$

由于对尺度函数 $\varphi(t)$ 最基本的要求是 $\Phi(0)=1$,即 $\int_{\mathbf{R}}\varphi(t)\mathrm{d}t=1$,因而在假设 $\Phi(\omega)$ 是连续的且 $\Phi(0)=1$ 的条件下,式(4.8)中的 $\sum_{j=1}^{n}H\left(\frac{\omega}{2^j}\right)$ 在 $n\to+\infty$ 时是收敛的,从而有

$$\Phi(\omega)=\left(\prod_{j=1}^{\infty}H\left(\frac{\omega}{2^j}\right)\right)\Phi(0)=\prod_{j=1}^{\infty}H\left(\frac{\omega}{2^j}\right) \tag{4.9}$$

当 $H(\omega)$ 满足条件式(4.3)、式(4.4)及式(4.5)时,由 $\Phi(\omega)$ 的 Fourier 逆变换可以确定一个尺度函数 $\varphi(t)$,进而可以构造相应的正交多分辨分析 $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$。

在时域上,与式(4.3)及式(4.4)等价的条件是

$$\sum_k h_{k-2n}\bar{h}_{k-2m}=\delta_{n,m} \tag{4.10}$$

$$\sum_k h_k=\sqrt{2} \tag{4.11}$$

事实上,由定理3.3,条件式(4.3)是 $\varphi(t)$ 的平移系构成 V_0 规范正交的充要条件。于是有

$$|H(\omega)|^2+|H(\omega+\pi)|^2=1\Leftrightarrow\langle\varphi(t-n),\varphi(t-m)\rangle=\delta_{n,m}$$

由双尺度方程可知

$$\varphi(t-n)=\sqrt{2}\sum_l h_l\varphi(2t-2n-l)=\sqrt{2}\sum_k h_{k-2n}\varphi(2t-k)\qquad(k=2n+l)$$

同理

$$\varphi(t-m)=\sqrt{2}\sum_k h_{k-2m}\varphi(2t-k)$$

由于 $\langle\varphi(2t-k),\varphi(2t-j)\rangle=\frac{1}{2}\delta_{k,j}$,因此有

$$\begin{aligned}\delta_{n,m}&=\langle\varphi(t-n),\varphi(t-m)\rangle=2\langle\sum_k h_{k-2n}\varphi(2t-k),\sum_j h_{j-2m}\varphi(2t-j)\rangle=\\&2\sum_k h_{k-2n}\sum_j\bar{h}_{j-2m}\langle\varphi(2t-k),\varphi(2t-j)\rangle=\\&\sum_k h_{k-2n}\bar{h}_{k-2m}\end{aligned}$$

条件式(4.10)也常写成

$$\sum_k h_k\bar{h}_{k+2n}=\delta_{n,0} \tag{4.12}$$

条件式(4.11)容易由 $H(0)=1$ 直接得到。

由 $G(\omega)$ 构造 MRA 中与 $\varphi(t)$ 相应的小波 $\psi(t)$,$G(\omega)$ 应满足的充分条件是(见定

理 3.5)

$$H(\omega)\overline{G}(\omega)+H(\omega+\pi)\overline{G}(\omega+\pi)=0 \tag{4.13}$$

$$|G(\omega)|^2+|G(\omega+\pi)|^2=1 \tag{4.14}$$

显然,由式(4.3)、式(4.4) 及式(4.13) 推知

$$G(0)=0 \tag{4.15}$$

类似于式(4.10)、式(4.11) 的证明可知,式(4.13)、式(4.14) 及式(4.15) 在时域中的等价条件是

$$\sum_k h_k g_{k+2n}=0 \tag{4.16}$$

$$\sum_k g_k g_{k+2n}=\delta_{n,0} \tag{4.17}$$

$$\sum_k g_k=0 \tag{4.18}$$

2. 充分条件 2

由 $H(\omega)$ 构造 $L^2(\mathbf{R})$ 正交多分辨分析的尺度函数 $\varphi(t)$,$H(\omega)$ 应满足

(1) $|H(\omega)|^2+|H(\omega+\pi)|^2=1$;

(2) $H(0)=1$;

(3) $H(\omega)=\left(\frac{1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}}{2}\right)^N L(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega})$,其中 $L(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega})$ 是关于 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}$ 的多项式,且 $\sup_\omega|L(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega})|<2^{N-1}$,$N>1$。

4.1.2 由滤波器构造尺度函数和小波

这里仅简单叙述构造方法。因为这些方法仅是理论上的方法,实际构造时另有其他方法。

方法 1 选取$\{h_k\}$,使$\prod_{j=1}^{\infty}H\left(\frac{\omega}{2^j}\right)$收敛。对式(4.9) 作 Fourier 逆变换,可以确定尺度函数 $\varphi(t)$。

选取 $G(\omega)$,使其满足条件式(4.13) 和式(4.14),例如取 $G(\omega)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}\overline{H}(\omega+\pi)$,由 $\Psi(\omega)=G\left(\frac{\omega}{2}\right)\Phi\left(\frac{\omega}{2}\right)$可以确定 $\psi(t)$。

方法 2 对于给定的$\{h_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$,写出双尺度方程

$$\varphi(t)=\sqrt{2}\sum_k h_k\varphi(2t-k)$$

选取

$$\varphi_0(t)=\begin{cases}1, & -\frac{1}{2}\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}\\ 0, & 其他\end{cases}$$

作迭代：

$$\varphi_{n+1} = \sqrt{2}\sum_{k} h_k \varphi_n(2t-k), \qquad n = 0,1,2,\cdots \tag{4.19}$$

当$\{h_k\}_{k\in Z}$满足充分条件 2 时，由迭代式(4.19) 得到一个尺度函数 $\varphi(t)$。

但是，这里得到的 $\varphi(t)$ 其平移系$\{\varphi(t-k)\}_{k\in Z}$一般不是正交系，此时，可将 $\varphi(t)$ 正交化：

$$\tilde{\Phi}(\omega) = \frac{\Phi(\omega)}{\left[\sum_{k\in Z} |\Phi(\omega+2\pi k)|^2\right]^{1/2}} \tag{4.20}$$

取
$$\tilde{\varphi}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_R \tilde{\Phi}(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

可以得到规范正交基$\{\tilde{\varphi}(t-k)\}_{k\in Z}$。

4.2 紧支集正交小波的构造

4.2.1 紧支集正交尺度函数的构造

所谓紧支集函数，是指函数值不为零的区间是有限区间$[a,b]$，称$[a,b]$为该函数的支撑或支集。一个函数 $\varphi(t)$ 的支撑区间$[a,b]$常记为 $\text{supp}\varphi(t) = [a,b]$。

下面证明本章开始所说的一个论点。设 $\varphi(t)$ 是紧支集函数，则由双尺度方程，有

$$h_k = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_R \varphi\left(\frac{t}{2}\right)\bar{\varphi}(t-k)dt$$

由此可知$\{h_k\}$只有有限多项非零。反之，若$\{h_k\}$只有$(N+1)$个项非零，把双尺度方程的右端经过适当平移可得

$$\varphi(t) = \sqrt{2}\sum_{k=0}^{N} h_k\varphi(2t-k) \tag{4.21}$$

由 4.1.2 的方法 2，取 $\varphi_0(t) = N_2(t)$（二阶 B-样条），则有

$$N_2(t) = \begin{cases} 1-t, & 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 1+t, & -1 \leqslant t \leqslant 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

显然，$\text{supp}\varphi_0(t) = [-1,1]$，按式(4.19) 作迭代，由 $\varphi_1(t) = \sqrt{2}\sum_{k=0}^{N} h_k\varphi_0(2t-k)$，可知 $\varphi_1(t)$ 也是紧支集函数。这是因为由 $2t \geqslant -1$，得 $t \geqslant -\frac{1}{2}$，由 $2t - N \leqslant 1$，得 $t \leqslant \frac{1+N}{2}$，所以

$$\text{supp}\varphi_1 = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1+N}{2}\right]$$

同理，有

$$\mathrm{supp}\varphi_2 = \left[-\frac{1}{2^2}, \frac{1+N+2N}{2^2}\right]$$

一般地，可求出 $\varphi_n(t)$ 的支集为

$$\mathrm{supp}\varphi_n = \left[-\frac{1}{2^n}, \frac{1+2N+2^2N+\cdots+2^nN}{2^n}\right] = \left[-\frac{1}{2^n}, \frac{2+(2^n-1)N}{2^n}\right]$$

令 $n\to+\infty$，则 $\varphi_n(t)\to\varphi(t)$，因此 $\varphi(t)$ 的支集为$[0,N]$，显然 $\varphi(t)$ 是紧支集的。此时，$\varphi(t)$ 不是正交的，经正交化后可得紧支集正交尺度函数。需要说明的是 $\varphi_0(t)$ 的选取可以任意，只要满足尺度函数的基本性质且是有限支撑，都可以得出相应的结果。

以上证明过程说明，如果已知一个有限长度(非零项有限)的滤波器$\{h_k\}$，就可以构造一个紧支集正交尺度函数 $\varphi(t)$。显然，$\{h_k\}$ 就是与 $\varphi(t)$ 相应的低通滤波器，从而 Mallat 的分解与重构公式的求和计算只有有限多项，不会引起截断误差。

4.2.2 Daubechies 小波

由前段讨论可知，用长度有限的滤波器$\{h_k\}$ 可以构造紧支集正交尺度函数。但在实际应用中，$\{h_k\}$ 是未知的。如何寻找$\{h_k\}$，本段介绍 Daubechies 方法。因为涉及的理论较多，这里不详细讨论，有兴趣的读者请参阅有关的参考文献。

据 4.1 节的内容，由 $H(\omega)$ 构造尺度函数，$H(\omega)$ 应满足充分条件 2。现在，设$\{h_k\}$ 是有限长度的共轭镜像滤波器，$H(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=0}^{2N-1}h_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega k}$，由充分条件 2 中的(3) 式，$H(\omega)$ 可写成

$$H(\omega)=\left[\frac{1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}}{2}\right]^N L(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}) \tag{4.22}$$

式中，$L(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega})$ 是 $N-1$ 次多项式。

另外，为保证尺度函数的正交性，$H(\omega)$ 还应满足充分条件 2 中的(1) 式。于是

$$|H(\omega)|^2=\left|\frac{1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}}{2}\right|^{2N}|L(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega})|^2=$$

$$\left(\cos^2\frac{\omega}{2}\right)^N|L(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega})|^2=\left(1-\sin^2\frac{\omega}{2}\right)^N|L(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega})|^2$$

在这里再要求 φ 和 ψ 是实函数，故设 h_k 是实数，这样

$$|L(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega})|^2=L\bar{L}=L(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega})L(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega})$$

即$|L(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega})|^2$ 是 ω 的偶函数，因此它可以表示成 $\cos\omega$ 的多项式，或 $\sin^2\frac{\omega}{2}$ 的多项式。设

$$|L(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega})|^2=P\left(\sin^2\frac{\omega}{2}\right)=P(y),\qquad y=\sin^2\frac{\omega}{2}$$

则

$$|H(\omega)|^2 = (1-y)^N P(y) \tag{4.23}$$

又

$$|H(\omega+\pi)|^2 = \left(1-\sin^2\frac{\omega+\pi}{2}\right)^N |L(e^{-i(\omega+\pi)})|^2 =$$

$$\left(\sin^2\frac{\omega}{2}\right)^N P\left(\cos^2\frac{\omega}{2}\right) = y^N P(1-y)$$

由正交性条件，得

$$(1-y)^N P(y) + y^N P(1-y) = 1 \tag{4.24}$$

方程式(4.24)的一般解是

$$P(y) = P_N(y) + y^N R(y) \tag{4.25}$$

式中，$R(y)$ 是一个多项式，满足 $R(y) = -R(1-y)$。即 $R(y)$ 是关于$\frac{1}{2}$反对称的，常写成 $R\left(\frac{1}{2}-y\right)$，而

$$P_N(y) = \sum_{k=0}^{N-1} \begin{bmatrix} N-1+k \\ k \end{bmatrix} y^k \tag{4.26}$$

在式(4.25)中，令 $R \equiv 0$，得 $P(y) = P_N(y)$，代入式(4.23)，有

$$|H(\omega)|^2 = (1-y)^N P(y) = \left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2N} P\left(1-\cos^2\frac{\omega}{2}\right) \tag{4.27}$$

式(4.27)等号两端都是关于 ω 的偶函数，因此，两端都可以写成关于 $1, \cos\omega, \cos 2\omega, \cdots$ 的有限项的线性组合。然后，比较两端同频率的余弦项系数，再利用前节充分条件中的 $H(0)=1$，就可以确定出 $h_k, k=0,1,\cdots,2N-1$。根据 Riesz 定理可以知道，$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=0}^{2N-1} h_k e^{-i\omega k}$ 就是满足方程式(4.27)的一个解。

需要说明的是，这里得到的 $H(\omega)$，是 Daubechies 在式(4.25)中令 $R\equiv 0$ 构造的。事实上，还有其他的 $H(\omega)$ 满足方程式(4.27)。

总结前面的讨论，有

定理 4.1 满足充分条件 2 的 $H(\omega)$ 的表达式

$$H(\omega) = \left(\frac{1+e^{-i\omega}}{2}\right)^N L(e^{-i\omega})$$

中，

$$|L(e^{-i\omega})|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} \begin{bmatrix} N-1+k \\ k \end{bmatrix} \sin^{2k}\frac{\omega}{2}$$

利用上述方法求出 $H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=0}^{2N-1} h_k e^{-i\omega k}$ 以后，就可以具体构造尺度函数 $\varphi(t)$，进而构

造出小波函数，这样构造的小波称为 Daubechies 小波。

附注　(1) 需要说明的是，在实际构造尺度函数 $\varphi(t)$ 时，总是对 $\varphi(t)$ 有一个基本要求：

$$\begin{cases}\varphi(t) \in L^1(\mathbf{R}), \quad \{h_k\} \in l^1 & (4.28)\\ \sum_{k\in\mathbf{Z}}\varphi(t-k) = 1, \quad \text{几乎处处} & (4.29)\end{cases}$$

它是我们在前面已知的要求 $\hat{\varphi}(0) = 1, \hat{\varphi}(2k\pi) = 0(k \neq 0, k \in \mathbf{Z})$ 的一个推论。

(2) 利用 Daubechies 方法构造出的尺度函数和小波，当 $N > 1$ 时，$\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 没有具体的解析表达式。

下面给出两个算例，以便理解 Daubechies 小波的构造过程。

当 $N = 1$ 时，由式(4.26)，有

$$P(y) = 1$$

设 $H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}(h_0 + h_1 e^{-i\omega})$，代入方程式(4.27)，得

$$\frac{1}{2}(h_0 + h_1 e^{-i\omega})(h_0 + h_1 e^{i\omega}) = \cos^2\frac{\omega}{2}$$

即

$$\frac{1}{2}(h_0^2 + h_1^2) + h_0 h_1 \cos\omega = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\omega$$

比较两端系数，得

$$h_0^2 + h_1^2 = 1$$

$$2h_0 h_1 = 1$$

求解，得 $h_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$。由本节 4.2.1 段可知，$\{h_0, h_1\}$ 对应的尺度函数 $\varphi(t)$ 的支集为 $[0,1]$。将 h_0, h_1 代入双尺度方程，得

$$\varphi(t) = \varphi(2t) + \varphi(2t-1)$$

反复使用双尺度方程，再由 $\varphi(0) + \varphi(1) = 1$，可算出

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = 1, \quad \varphi\left(\frac{1}{2^2}\right) = 1, \quad \varphi\left(\frac{3}{2^2}\right) = 1,$$

$$\varphi\left(\frac{1}{2^3}\right) = 1, \quad \varphi\left(\frac{3}{2^3}\right) = 1, \quad \varphi\left(\frac{5}{2^3}\right) = 1, \quad \cdots$$

最后收敛到尺度函数

$$\varphi(t) = \begin{cases}1, & 0 \leqslant t < 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

进而，由 $\varphi(t)$ 构造小波，可得 Haar 小波 $\psi(t)$（见例 3.1）。可见，当 $N=1$ 时 Daubechies 小波就是 Haar 小波。

当 $N=2$ 时，用类似 $N=1$ 时的方法可以算出$\{h_k\}$，但也可以直接用定理 4.1 来计算$\{h_k\}$。

为简单，记 $z=e^{-i\omega}$，此时 $L(e^{-i\omega})=L(z)$。先求 $L(z)$。

由式(4.22)知，$L(z)$ 是 $N-1$ 次多项式，因此，设 $L(z)=a_0+a_1z$。而当 $N=2$ 时，$P(y)=1+2y=1+2\sin^2\dfrac{\omega}{2}$，由定理 4.1，有

$$|L(z)|^2=L(z)\overline{L(z)}=(a_0+a_1z)(a_0+a_1z^{-1})=$$

$$a_0^2+a_1^2+a_0a_1(z+z^{-1})=a_0^2+a_1^2+a_0a_1\left(2-4\sin^2\frac{\omega}{2}\right)=P(y)=1+2\sin^2\frac{\omega}{2}$$

从而得方程组

$$\begin{cases}(a_0+a_1)^2=1\\ 2a_0a_1=-1\end{cases}$$

解之，得（取其中一组解）

$$a_0=\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}),\qquad a_1=\frac{1}{2}(1-\sqrt{3})$$

再由定理 4.1 中 $H(\omega)$ 的表示式，有

$$H(\omega)=\left(\frac{1+z}{2}\right)^2L(z)=\frac{1}{4}(1+2z+z^2)(a_0+a_1z)=$$

$$\frac{1}{4}[a_0+(2a_0+a_1)z+(a_0+2a_1)z^2+a_1z^3]$$

令 $H(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sum\limits_{n=0}^{3}h_nz^n$，代入上式，比较系数，得

$$\frac{1}{\sqrt{2}}h_0=\frac{1}{4}a_0,\quad \frac{1}{\sqrt{2}}h_1=\frac{1}{4}(2a_0+a_1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}h_2=\frac{1}{4}(a_0+2a_1),\quad \frac{1}{\sqrt{2}}h_3=\frac{1}{4}a_1$$

代入 a_0,a_1 的值，得

$$h_0=\frac{1}{8}(\sqrt{2}+\sqrt{6}),\quad h_1=\frac{1}{8}(3\sqrt{2}+\sqrt{6})$$

$$h_2=\frac{1}{8}(3\sqrt{2}-\sqrt{6}),\quad h_3=\frac{1}{8}(\sqrt{2}-\sqrt{6})$$

这组滤波器对应的尺度函数 $\varphi(t)$ 的支集为[0,3]。

算出$\{h_n\}$后,可写出双尺度方程

$$\varphi(t)=\sqrt{2}[h_0\varphi(2t)+h_1\varphi(2t-1)+h_2\varphi(2t-2)+h_3\varphi(2t-3)]$$

由上面方程有

$$\varphi(0)=\sqrt{2}h_0\varphi(0)$$

$$\varphi(1)=\sqrt{2}h_0\varphi(2)+\sqrt{2}h_1\varphi(1)+\sqrt{2}h_2\varphi(0)$$

$$\varphi(2)=\sqrt{2}h_1\varphi(3)+\sqrt{2}h_2\varphi(2)+\sqrt{2}h_3\varphi(1)$$

$$\varphi(3)=\sqrt{2}h_3\varphi(3)$$

由于$h_0,h_3\neq 0\Rightarrow\varphi(0)=\varphi(3)=0$,从而得

$$\varphi(1)=\sqrt{2}h_0\varphi(2)+\sqrt{2}h_1\varphi(1)$$

$$\varphi(2)=\sqrt{2}h_2\varphi(2)+\sqrt{2}h_3\varphi(1)$$

再与$\varphi(0)+\varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(3)=1$联立,可得

$$\varphi(1)=\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}),\quad \varphi(2)=\frac{1}{2}(1-\sqrt{3})$$

反复使用双尺度方程,有

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}h_0\varphi(1)=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

$$\varphi\left(\frac{3}{2}\right)=\sqrt{2}h_1\varphi(2)+\sqrt{2}h_2\varphi(1)=0$$

$$\varphi\left(\frac{5}{2}\right)=\sqrt{2}h_3\varphi(2)=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

利用这些已知的函数值,可以继续求出更多点上的函数值,如

$$\varphi\left(\frac{1}{4}\right),\varphi\left(\frac{3}{4}\right),\varphi\left(1\frac{1}{4}\right),\varphi\left(1\frac{3}{4}\right),\varphi\left(2\frac{1}{4}\right),\varphi\left(2\frac{3}{4}\right),\cdots$$

有了较多点上的函数值,就可以作出$\varphi(t)$的近似图形。

在引用前面所述的 Daubechies 方法构造出$H(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=0}^{2N-1}h_k e^{-ik\omega}$后,由$G(\omega)=e^{-i\omega}\bar{H}(\omega+\pi)$或对应的$g_n=(-1)^{1-n}\bar{h}_{1-n}$,算出$\{g_n\}$,代入双尺度方程

$$\psi(t)=\sqrt{2}\sum_n(-1)^{1-n}\bar{h}_{1-n}\varphi(2t-n)\tag{4.30}$$

由已算出的$\varphi(t)$一系列点上的函数值,可以得到$\psi(t)$在一系列点上的函数值,从而作出$\psi(t)$的近似图形。

表4.1给出了$N=2\sim10$的$\{h_k\}$的值,图4.1给出了$N=2,3,5,7,9$时的φ_N和ψ_N的图形。

表 4.1　当 $N=2\sim10$ 时 $\{h_n\}$ 的值 $\left(\sum h_n=\sqrt{2}\right)$

N	n	h_n
2	0	0.482 962 913 144 534 1
	1	0.836 516 303 737 807 7
	2	0.224 143 868 042 013 4
	3	−0.129 409 522 551 260 3
3	0	0.332 670 552 950 082 5
	1	0.806 891 509 311 092 4
	2	0.459 877 502 118 491 4
	3	−0.135 011 020 010 254 6
	4	−0.085 441 273 882 026 7
	5	0.035 226 291 885 709 5
4	0	0.230 377 813 308 896 4
	1	0.714 846 570 552 915 4
	2	0.630 880 767 939 858 7
	3	−0.027 983 769 416 859 9
	4	−0.187 034 811 719 093 1
	5	0.030 841 381 835 560 7
	6	0.032 883 011 666 885 2
	7	−0.010 597 401 785 069 0
5	0	0.160 102 397 974 192 9
	1	0.603 829 269 797 189 5
	2	0.724 308 528 437 772 6
	3	0.138 428 145 901 320 3
	4	−0.242 294 887 066 382 3
	5	−0.032 244 869 584 638 1
	6	0.077 571 493 840 045 9
	7	−0.006 241 490 212 798 3
	8	−0.012 580 751 999 082 0
	9	0.003 335 725 285 473 8
6	0	0.111 540 743 350 109 5
	1	0.494 623 890 398 453 3
	2	0.751 133 908 021 095 9
	3	0.315 250 351 709 198 2
	4	−0.226 264 693 965 440 0
	5	−0.129 766 867 567 262 5
	6	0.097 501 605 587 322 5
	7	0.027 522 865 530 305 3
	8	−0.031 582 039 317 486 2
	9	0.000 553 842 201 161 4
	10	0.004 777 257 510 945 5
	11	−0.001 077 301 085 308 5
7	0	0.077 852 054 085 003 7
	1	0.396 539 319 481 891 2
	2	0.729 132 090 846 195 7
	3	0.469 782 287 405 188 9
	4	0.143 906 003 928 521 2
	5	−0.224 036 184 993 841 2
	6	0.071 309 219 266 827 2
	7	0.080 612 609 151 077 4
	8	−0.038 029 936 935 010 4
	9	−0.016 574 541 630 665 5
	10	0.012 550 998 556 098 6
	11	0.000 429 577 972 921 4
	12	−0.001 801 640 704 047 3
	13	0.000 353 713 799 974 5
8	0	0.054 415 842 243 107 2
	1	0.312 871 590 914 316 6
	2	0.675 630 736 297 319 5
	3	0.585 354 683 654 215 9
	4	−0.015 829 105 256 382 3
	5	−0.284 015 542 961 582 4
	6	0.000 472 484 573 912 4
	7	0.128 747 426 620 489 3
	8	−0.017 369 301 001 809 0
	9	−0.044 088 253 930 797 1
	10	0.013 981 027 917 400 1
	11	0.008 746 094 047 406 5
	12	−0.004 870 352 993 452 0
	13	−0.000 391 740 373 377 0
	14	0.000 675 449 406 450 6
	15	−0.000 117 476 784 124 8
9	0	0.038 077 947 363 877 8
	1	0.243 834 674 612 585 8
	2	0.604 823 123 690 095 5
	3	0.657 288 078 051 273 6
	4	0.133 197 385 824 988 3
	5	−0.293 273 783 279 166 3
	6	−0.096 840 783 222 949 2
	7	0.148 540 749 338 125 6
	8	0.030 725 681 479 338 5
	9	−0.067 632 829 061 327 9
	10	0.000 250 947 114 834 0
	11	0.022 361 662 123 679 8
	12	−0.004 723 204 757 751 8
	13	−0.004 281 503 682 463 5
	14	0.001 847 646 883 056 3
	15	0.000 230 385 763 523 2
	16	−0.000 251 963 188 942 7
	17	0.000 039 347 320 316 3
10	0	0.026 670 057 900 547 3
	1	0.188 176 800 077 634 7
	2	0.527 201 188 931 575 7
	3	0.688 459 039 453 436 3
	4	0.281 172 343 650 571 5
	5	−0.249 846 424 327 159 8
	6	−0.195 946 274 377 286 2
	7	0.127 369 340 335 754 1
	8	0.093 057 364 603 554 7
	9	−0.071 394 147 166 350 1
	10	−0.029 457 536 821 839 9
	11	0.033 212 674 059 361 2
	12	0.003 606 553 566 987 0
	13	−0.010 733 175 483 300 7
	14	0.001 395 351 747 068 8
	15	0.001 992 405 295 192 5
	16	−0.000 685 856 694 956 4
	17	−0.000 116 466 855 128 5
	18	0.000 093 588 670 320 2
	19	−0.000 013 264 202 894 5

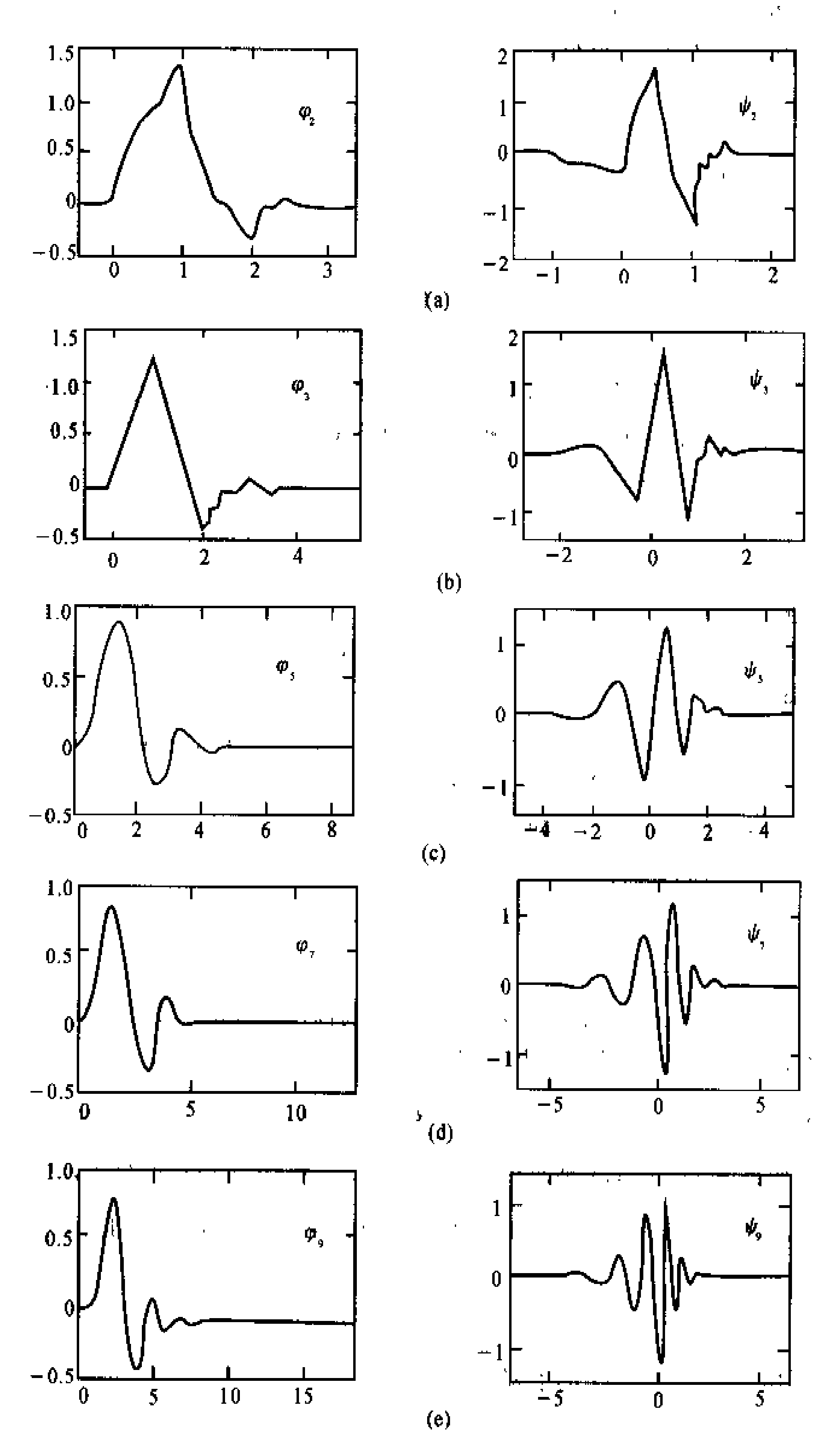


图 4.1　当 $N=2,3,5,7,9$ 时 φ_N 和 ψ_N 的图形

(a) $N=2$; (b) $N=3$; (c) $N=5$; (d) $N=7$; (e) $N=9$

综合本章前面的讨论及图4.1可知，当$\{h_k\}$的长度为$2N$时，$\varphi_N(t)$支集为$[0,2N-1]$。由式(4.30)及$\{h_k\}$为实数，可得

$$\psi_N(t)=\sqrt{2}\sum_{n=2-2N}^{1}(-1)^{1-n}h_{1-n}\varphi_N(2t-n) \tag{4.31}$$

此时可推出$\psi_N(t)$的支集为$[-N+1,N]$。因此Daubechies小波是紧支集的正交小波，但它不是对称的。

4.3 紧支集双正交小波

Daubechies小波具备紧支性和正交性，但不具备对称性。在应用中，有时需要对称的性质。理论上已经证明，同时具有紧支性、正交性和对称性的小波是不存在的。所以为了得到紧支集的对称小波，就得放弃正交性这个条件。

实函数$\varphi(t)$，如果满足

(1) $\qquad \varphi(a+t)=\varphi(a-t) \qquad t\in\mathbf{R},\quad a(常数)\in\mathbf{R}$

则称为对称的。如果满足

(2) $\qquad \varphi(a+t)=-\varphi(a-t) \quad t\in\mathbf{R},\quad a(常数)\in\mathbf{R}$

则称为反对称的。

如果将多分辨分析定义3.1中的(5)换成：存在$\varphi(t)\in V_0$，使得$\{\varphi(t-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$构成$V_0$的Riesz基，那么这样的多分辨分析不再是前面所说的正交多分辨分析。

本节主要介绍双正交小波的概念及性质。

定义4.1 设$\varphi(t),\tilde{\varphi}(t)\in L^2(\mathbf{R})$，如果

$$\langle\varphi(t-k),\tilde{\varphi}(t-n)\rangle=\delta_{k,n},\quad k,n\in\mathbf{Z} \tag{4.32}$$

则称$\varphi(t),\tilde{\varphi}(t)$是双正交的。

特别情况，当$\varphi=\tilde{\varphi}$时，$\{\varphi(t-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$就成为前面所研究的规范正交的尺度函数。而在第2章中我们已经知道，规范正交基一定是Riesz基。

定义4.2 设$\{V_j,\varphi\}$和$\{\tilde{V}_j,\tilde{\varphi}\}$是$L^2(\mathbf{R})$中分别以$\varphi(t)$和$\tilde{\varphi}(t)$作为尺度函数形成的两个MRA，如果$\varphi(t)$与$\tilde{\varphi}(t)$是双正交的，则称$\{V_j\}$和$\{\tilde{V}_j\}$是双正交MRA。

由上述定义可以看出，如果$\{V_j\}$与$\{\tilde{V}_j\}$是双正交MRA，则V_j的Riesz基由$\varphi_{j,k}(t)$的平移系

$$\{\varphi_{j,k}(t)=2^{-j/2}\varphi(2^{-j}t-k)\}_{k\in\mathbf{Z}} \tag{4.33}$$

构成，$\tilde{V}_j$的Riesz基由$\tilde{\varphi}_{j,k}(t)$的平移系

$$\{\tilde{\varphi}_{j,k}(t)=2^{-j/2}\tilde{\varphi}(2^{-j}t-k)\}_{k\in\mathbf{Z}} \tag{4.34}$$

构成。此时，存在空间分解(不是正交分解)

$$V_{j-1} = V_j \dotplus W_j, \qquad j \in \mathbf{Z} \tag{4.35}$$

$$\tilde{V}_{j-1} = \tilde{V}_j \dotplus \tilde{W}_j, \qquad j \in \mathbf{Z} \tag{4.36}$$

这里“$\dotplus$”表示直和，即 $V_{j-1} = V_j \cup W_j$ 且 $V_j \cap W_j = \{0\}$。式(4.35)表示 W_j 是 V_j 在 V_{j-1} 中的补空间(不是正交补)；式(4.36)表示 $\tilde{W}_j$ 是 $\tilde{V}_j$ 在 $\tilde{V}_{j-1}$ 中的补空间(不是正交补)。

类似地，有

$$\{\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2}\psi(2^{-j}t - k)\}_{k\in \mathbf{Z}} \tag{4.37}$$

形成 W_j 的 Riesz 基，而

$$\{\tilde{\psi}_{j,k}(t) = 2^{-j/2}\tilde{\psi}(2^{-j}t - k)\}_{k\in \mathbf{Z}} \tag{4.38}$$

形成 $\tilde{W}_j$ 的 Riesz 基。

由双正交 MRA 的定义还可知

$$V_{j-1} \perp \tilde{V}_{j-1} \tag{4.39}$$

于是

$$(V_j \dotplus W_j) \perp (\tilde{V}_j \dotplus \tilde{W}_j)$$

由此可知

$$\tilde{W}_j \perp V_j \tag{4.40}$$

$$W_j \perp \tilde{V}_j \tag{4.41}$$

$$\tilde{W}_j \perp W_j \tag{4.42}$$

由分解式(4.35)及式(4.36)，有

$$V_{j-1} = V_j \dotplus W_j = \cdots = V_J \dotplus W_J \dotplus W_{J-1} \dotplus \cdots \dotplus W_j \tag{4.43}$$

$$\tilde{V}_{j-1} = \tilde{V}_j \dotplus \tilde{W}_j = \cdots = \tilde{V}_J \dotplus \tilde{W}_J \dotplus \tilde{W}_{J-1} \dotplus \cdots \dotplus W_j \tag{4.44}$$

由此又知

$$V_i \perp \tilde{V}_j, \qquad \tilde{W}_i \perp W_j \tag{4.45}$$

在双正交 MRA 下，双尺度方程表示为

$$\varphi(t) = \sqrt{2}\sum_{k\in \mathbf{Z}} h_k \varphi(2t-k) \tag{4.46}$$

$$\psi(t) = \sqrt{2}\sum_{k\in \mathbf{Z}} g_k \varphi(2t-k) \tag{4.47}$$

$$\tilde{\varphi}(t) = \sqrt{2}\sum_{k\in \mathbf{Z}} \tilde{h}_k \tilde{\varphi}(2t-k) \tag{4.48}$$

$$\tilde{\psi}(t) = \sqrt{2}\sum_{k\in \mathbf{Z}} \tilde{g}_k \tilde{\varphi}(2t-k) \tag{4.49}$$

它们的频域形式为

$$\Phi(\omega) = H\left(\frac{\omega}{2}\right)\Phi\left(\frac{\omega}{2}\right) \tag{4.50}$$

$$\Psi(\omega)=G\left(\frac{\omega}{2}\right)\Phi\left(\frac{\omega}{2}\right) \tag{4.51}$$

$$\tilde{\Phi}(\omega)=\tilde{H}\left(\frac{\omega}{2}\right)\tilde{\Phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \tag{4.52}$$

$$\tilde{\Psi}(\omega)=\tilde{G}\left(\frac{\omega}{2}\right)\tilde{\Phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \tag{4.53}$$

式中

$$H(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in\mathbf{Z}}h_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega k} \tag{4.54}$$

$$\tilde{H}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in\mathbf{Z}}\tilde{h}_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega k} \tag{4.55}$$

$$G(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k}g_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega k} \tag{4.56}$$

$$\tilde{G}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k}\tilde{g}_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega k} \tag{4.57}$$

由定义 4.1 及式(4.39) ~ 式(4.45) 可知,双正交尺度函数和双正交小波具有以下性质:

$$\langle\varphi_{j,k},\tilde{\varphi}_{l,n}\rangle=\delta_{j,l}\,\delta_{k,n} \tag{4.58}$$

$$\langle\psi_{j,k},\tilde{\psi}_{l,n}\rangle=\delta_{j,l}\,\delta_{k,n} \tag{4.59}$$

$$\langle\psi_{j,k},\tilde{\varphi}_{j,n}\rangle=0 \tag{4.60}$$

$$\langle\tilde{\psi}_{j,k},\varphi_{j,n}\rangle=0 \tag{4.61}$$

设 $\varphi(t)$ 与相应的 $\psi(t)$ 的滤波器为 $H(\omega)$ 与 $G(\omega)$,$\tilde{\varphi}(t)$ 与相应的 $\tilde{\psi}(t)$ 的滤波器为 $\tilde{H}(\omega)$ 与 $\tilde{G}(\omega)$,则 $\varphi(t)$ 与 $\tilde{\varphi}(t)$ 是双正交尺度函数,其滤波器应满足的条件由下述定理 4.2 给出。

定理 4.2 设 $\varphi(t),\tilde{\varphi}(t)\in L^2(\mathbf{R})$,则 $\varphi(t)$ 与 $\tilde{\varphi}(t)$ 是双正交的,其充要条件是

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}}\Phi(\omega+2\pi k)\tilde{\Phi}(\omega+2\pi k)\equiv 1 \tag{4.62}$$

或

$$\overline{H}(\omega)\tilde{H}(\omega)+\overline{H}(\omega+\pi)\tilde{H}(\omega+\pi)=1 \tag{4.63}$$

$\psi(t)$ 是与 $\varphi(t)$ 相应的小波,$\tilde{\psi}(t)$ 是与 $\tilde{\varphi}(t)$ 相应的小波。$\psi(t)$ 和 $\tilde{\psi}(t)$ 对应的滤波器应满足的条件由定理 4.3 给出。

定理 4.3 设$\{V_j\}$ 和$\{\tilde{V}_j\}$ 分别是以 $\varphi(t)$ 和 $\tilde{\varphi}(t)$ 为尺度函数的 MRA,则 $\psi(t)$ 是 $\varphi(t)$ 相应的小波,其充要条件是

$$\overline{G}(\omega)\tilde{H}(\omega)+\overline{G}(\omega+\pi)\tilde{H}(\omega+\pi)=0 \tag{4.64}$$

$\tilde{\psi}(t)$ 是 $\tilde{\varphi}(t)$ 相应的小波，其充要条件是

$$\tilde{G}(\omega)\bar{H}(\omega)+\tilde{G}(\omega+\pi)\bar{H}(\omega+\pi)=0 \tag{4.65}$$

$\psi(t)$ 与 $\tilde{\psi}(t)$ 是双正交的，其充要条件是

$$\bar{\tilde{G}}(\omega)\tilde{G}(\omega)+\bar{G}(\omega+\pi)\tilde{G}(\omega+\pi)=1 \tag{4.66}$$

由定理4.2、定理4.3可知，如果已知尺度函数 $\varphi(t)$ 和 $\tilde{\varphi}(t)$，或者已知 $H(\omega)$ 和 $\tilde{H}(\omega)$，只要取满足式(4.64) 和式(4.65) 的 $G(\omega)$ 与 $\tilde{G}(\omega)$，例如，取

$$G(\omega)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}\bar{\tilde{H}}(\omega+\pi) \tag{4.67}$$

$$\tilde{G}(\omega)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}\bar{H}(\omega+\pi) \tag{4.68}$$

就可由式(4.51) 和式(4.53) 确定 $\psi(t)$ 和 $\tilde{\psi}(t)$，因此，构造满足条件式(4.63) 的 $H(\omega)$ 与 $\tilde{H}(\omega)$ 是构造双正交小波的一个关键问题，为了便于记忆，将式(4.63)、式(4.64)、式(4.65) 和式(4.66)，用矩阵表示如下：

$$\begin{pmatrix} H(\omega) & G(\omega) \\ H(\omega+\pi), & G(\omega+\pi) \end{pmatrix}^{\mathrm{H}} \begin{pmatrix} \tilde{H}(\omega) & \tilde{G}(\omega) \\ \tilde{H}(\omega+\pi), & \tilde{G}(\omega+\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.69}$$

其中“H”表示转置共轭。

满足式(4.59) 的 ψ 与 $\tilde{\psi}$ 称为双正交小波。双正交尺度函数和小波，也称为对偶尺度函数和对偶小波。

4.4　紧支集对称双正交小波*

对称性是一种常见的自然景象，当然人们希望用以刻画某些图像的紧支集正交实小波也具有对称性。但是在前一节已经知道，紧支集对称正交实小波除 Haar 小波外是不存在的，在引入双正交小波以后，就可以构造紧支集对称双正交小波。在实际应用中，这种小波的应用效果有时要优于正交小波，例如在图像压缩中就是如此。

在 4.3 节已经指出，构造双正交小波，首先需要构造满足式(4.63) 的 $H(\omega)$ 和 $\tilde{H}(\omega)$。关于对称性，则要求 $H(\omega)$ 具有广义线性相位。要满足这个条件，只需 $H(\omega)$ 的时域形式 $\{h_k\}$ 具有对称或反对称性，可以证明 $\{h_k\}$ 的对称中心就是 $H(\omega)$ 的相位(见第 5 章)。

下面，讨论如何构造紧支集对称双正交小波。由前两节分析已经知道，紧支集双正交小波，完全由一对有限长的滤波器 $\{h_n,\tilde{h}_k\}$ 所刻画。因此，要构造紧支集对称双正交小波，必须具备以下条件：

(1) 滤波器 $\{h_n\}$，$\{\tilde{h}_k\}$ 是有限长度的：$\{h_n\}_{n=0}^{N}$，$\{\tilde{h}_k\}_{k=0}^{\tilde{N}}$，且具有实对称性：$h_n=$

$\pm h_{N-n}(n=0,1,\cdots,N/2)$，$\{\tilde{h}_k\}$ 也一样。其中，“±”号表示对称或反对称；

(2) $\{h_n\}$ 与 $\{\tilde{h}_k\}$ 的频域形式 $H(\omega)$ 与 $\tilde{H}(\omega)$ 须满足式(4.63)。

1) 设 $\{h_n\}$ 的长度为 $2M+1$，即 $\{h_n\}$ 中的非零项的个数为奇数，且具有对称性：$h_n=\pm h_{2M-n}(n=0,1,\cdots,M)$。为方便，将 h_n 的下标作平移(对称中心移至原点)，则有 $h_n=h_{-n}$。

设 $H(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sum\limits_{n=-M}^{M}h_n\mathrm{e}^{-in\omega}$，则有

$$
\begin{aligned}
H(\omega)=&\frac{1}{\sqrt{2}}h_0+\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{M}h_n\mathrm{e}^{-in\omega}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=-1}^{-M}h_n\mathrm{e}^{-in\omega}=\\
&\frac{1}{\sqrt{2}}h_0+\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{M}h_n\mathrm{e}^{-in\omega}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{M}h_{-n}\mathrm{e}^{in\omega}=\\
&\frac{1}{\sqrt{2}}h_0+\frac{2}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{M}h_n\cos n\omega
\end{aligned}
$$

由于 $H(\pi)=0$，因而 π 是 $H(\omega)$ 的零点。又因为 $H^{(2K-1)}(\pi)=0$，所以 π 是 $H(\omega)$ 的 $2K$ 阶零点。因此可设

$$
H(\omega)=\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2K}Q(\cos\omega) \tag{4.70}
$$

式中，Q 是一个多项式。类似地，设 $\{\tilde{h}_k\}$ 的长度为 $2\tilde{M}+1$，则有

$$
\tilde{H}(\omega)=\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2\tilde{K}}\tilde{Q}(\cos\omega) \tag{4.71}
$$

将式(4.70)、式(4.71) 代入式(4.63)，有

$$
\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2L}\bar{Q}(\cos\omega)\tilde{Q}(\cos\omega)+\left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^{2L}\bar{Q}(-\cos\omega)\tilde{Q}(-\cos\omega)=1 \tag{4.72}
$$

式中，$L=K+\tilde{K}$。

由于 $\cos\omega=1-2\sin^2\dfrac{\omega}{2}$，因此可设

$$
\bar{Q}(\cos\omega)\tilde{Q}(\cos\omega)=R\left(\sin^2\frac{\omega}{2}\right)=R(y),\quad y=\sin^2\frac{\omega}{2}
$$

此时，式(4.72) 可化简为

$$
(1-y)^L R(y)+y^L R(1-y)=1 \tag{4.73}
$$

这和式(4.24) 的形式完全一样，它的一般解是

$$
R(y)=R_L(y)+y^L T\left(\frac{1}{2}-y\right)
$$

在上式中取 $T\equiv 0$，由式(4.26) 可知

$$
R(y)=\sum_{j=0}^{L-1}\begin{bmatrix}L-1+j\\ j\end{bmatrix}y^j \tag{4.74}
$$

是式(4.73)的一个解。

2) 设$\{h_n\}$的非零项个数为偶数。

设 $H(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=-M+1}^{M}h_n e^{-in\omega}, h_n=h_{1-n}$,此时,有

$$H(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{M}h_n e^{-in\omega}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{-M+1}h_n e^{-in\omega}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{M}h_n e^{-in\omega}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{M}h_{1-n}e^{in\omega}\,e^{-i\omega}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\omega}{2}}\sum_{n=1}^{M}h_n\left(e^{-i(n-\frac{1}{2})\omega}+e^{i(n-\frac{1}{2})\omega}\right)=$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\omega}{2}}\sum_{n=1}^{M}h_n\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\omega$$

由于$H(\pi)=0$,所以π是$H(\omega)$的零点。又由于$H^{(2K)}(\pi)=0$,故π是$H(\omega)$的$2K+1$阶零点,因此可设

$$H(\omega)=e^{-i\frac{\omega}{2}}\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2K+1}Q(\cos\omega) \tag{4.75}$$

同理,设

$$\tilde{H}(\omega)=e^{-i\frac{\omega}{2}}\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2\tilde{K}+1}\tilde{Q}(\cos\omega) \tag{4.76}$$

将式(4.75)、式(4.76)代入式(4.63),有

$$\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2L}\bar{Q}(\cos\omega)\tilde{Q}(\cos\omega)+\left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^{2L}\bar{Q}(-\cos\omega)\tilde{Q}(-\cos\omega)=1 \tag{4.77}$$

式中,$L=K+\tilde{K}+1$。

比较式(4.72)与式(4.77)可知,它们的形式完全相同,只是其中的L的值不一样,式(4.77)中的$\bar{Q}(\cos\omega)\tilde{Q}(\cos\omega)$同样满足式(4.73)与式(4.74)。

对以上两种情形的任何一种,例如$\{h_n\}$的长度为奇数,具体构造$H(\omega)$和$\tilde{H}(\omega)$的方法是:将$R(y)=\bar{Q}(\cos\omega)\tilde{Q}(\cos\omega)$,$\left(y=\sin^2\frac{\omega}{2}\right)$代入式(4.74),则有

$$\bar{Q}(\cos\omega)\tilde{Q}(\cos\omega)=\sum_{j=0}^{L-1}\binom{L-1+j}{j}\sin^{2j}\frac{\omega}{2} \tag{4.78}$$

在式(4.78)中,先选择$\tilde{Q}(\cos\omega)$(例如,令$\tilde{Q}(\cos\omega)\equiv 1$),再由式(4.78)确定$\bar{Q}$,代入式(4.70)和式(4.71)就可以构造出$H(\omega)$和$\tilde{H}(\omega)$。有了$H(\omega)$和$\tilde{H}(\omega)$之后,就可以用式(4.67)和式(4.68)确定出$G(\omega)$和$\tilde{G}(\omega)$。

这里给出两个构造$H(\omega)$和$\tilde{H}(\omega)$的算例,使读者进一步理解上面的构造过程和其中的$K,\tilde{K}$的意义。

情形 Ⅰ 滤波器的长度为奇数:$2M+1$。

选择 $\tilde{Q}(\cos\omega)\equiv 1$,此时,由式(4.78),有 $Q(\cos\omega)=\sum_{j=0}^{L-1}\begin{bmatrix}L-1+j\\ j\end{bmatrix}\sin^{2j}\frac{\omega}{2}$,代入式(4.70)和式(4.71),得

$$H(\omega)=\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2K}\sum_{j=0}^{L-1}\begin{bmatrix}L-1+j\\ j\end{bmatrix}\sin^{2j}\frac{\omega}{2} \tag{4.79}$$

$$\tilde{H}(\omega)=\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2\tilde{K}} \tag{4.80}$$

(1) 取 $K=1,\tilde{K}=1$,则 $L=2$,确定 $H(\omega)$ 与 $\tilde{H}(\omega)$。

$$H(\omega)=\cos^2\frac{\omega}{2}\left(1+2\sin^2\frac{\omega}{2}\right)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}e^{-i\omega}+\frac{1}{4}e^{i\omega}-\frac{1}{8}e^{-2i\omega}-\frac{1}{8}e^{2i\omega}$$

故

$$h_{-2}=-\frac{\sqrt{2}}{8},\quad h_{-1}=\frac{\sqrt{2}}{4},\quad h_0=\frac{3\sqrt{2}}{4},\quad h_1=\frac{\sqrt{2}}{4},\quad h_2=-\frac{\sqrt{2}}{8}$$

$$\tilde{H}(\omega)=\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{-i\omega}+\frac{1}{4}e^{i\omega}$$

所以

$$\tilde{h}_{-1}=\frac{\sqrt{2}}{4},\quad \tilde{h}_0=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \tilde{h}_1=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

(2) 取 $K=1,\tilde{K}=2$;则 $L=3$,可仿照(1)的情形计算出 $H(\omega)$ 和 $\tilde{H}(\omega)$。

若遇到其他情形,如 $K=2,\tilde{K}=1$ 等,都可以如此算出 h_n 及 $\tilde{h}_k$。

情形 Ⅱ 滤波器的长度为偶数:$2M$。

选择 $\tilde{Q}\equiv 1$,此时由式(4.78),有 $Q(\cos\omega)=\sum_{j=0}^{L-1}\begin{bmatrix}L-1+j\\ j\end{bmatrix}\sin^{2j}\frac{\omega}{2}$,代入式(4.75)和式(4.76),得

$$\tilde{H}(\omega)=e^{-i\frac{\omega}{2}}\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2\tilde{K}+1} \tag{4.81}$$

$$H(\omega)=e^{-i\frac{\omega}{2}}\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2K+1}\sum_{j=0}^{L-1}\begin{bmatrix}L-1+j\\ j\end{bmatrix}\sin^{2j}\frac{\omega}{2} \tag{4.82}$$

与情形 Ⅰ 不同,这里 $L=\tilde{K}+K+1$。

进一步的讨论,将在5.2节中进行。

4.5 双正交小波变换及 Mallat 算法*

由定义 4.1 及定义 4.2 可知,$\{V_j,\varphi(t)\}$ 与 $\{\tilde{V}_j,\tilde{\varphi}(t)\}$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 中的两个双正交

的 MRA。

由多分辨分析的定义及空间分解式，有

$$L^2(\mathbf{R}) = \lim_{j\to-\infty} V_j = \lim_{j\to-\infty} \tilde{V}_j \tag{4.83}$$

$$L^2(\mathbf{R}) = \dotplus_{j\in\mathbf{Z}} W_j = \dotplus_{j\in\mathbf{Z}} \tilde{W}_j \tag{4.84}$$

在构造双正交的 MRA 时，对 φ 和 $\tilde{\varphi}$ 作适当的要求，这样由 φ 和 $\tilde{\varphi}$ 产生的小波 $\psi(t)$ 和 $\tilde{\psi}(t)$，其伸缩与平移 $\{\psi_{j,k}\}$ 和 $\{\tilde{\psi}_{j,k}\}$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 的一对双正交 Riesz 基。

由式(4.83)，对于充分大的 $|j|$，$f\in L^2(\mathbf{R})$ 可以表示成

$$f(t) \approx f_{V_j}(t) = \sum_k c_{j,k}\varphi_{j,k}(t)$$

与第 3 章类似，不妨设 $j=0$，即 V_0 表示具有最高频率的函数空间，此时，$f\in V_0$，于是有分解式

$$f(t) = f_0(t) = \sum_k c_{0,k}\varphi_{0,k}(t) \tag{4.85}$$

利用双正交性，有

$$c_{0,k} = \langle f, \tilde{\varphi}_{0,k}\rangle,\quad k\in\mathbf{Z} \tag{4.86}$$

由式(4.84)，有分解式

$$f(t) = \sum_{j,k} d_{j,k}\psi_{j,k}(t) = \sum_{j,k} \tilde{d}_{j,k}\tilde{\psi}_{j,k}(t) \tag{4.87}$$

式(4.87) 是 $f(t)$ 的两个小波级数，其中系数

$$d_{j,k} = \langle f, \tilde{\psi}_{j,k}\rangle,\quad j,k\in\mathbf{Z} \tag{4.88}$$

$$\tilde{d}_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k}\rangle,\quad j,k\in\mathbf{Z} \tag{4.89}$$

称为 $f(t)$ 的离散双正交小波变换。

利用空间分解式(4.43)，还有 $f(t)\in V_0$ 的分解式

$$f(t) = f_J(t) + \sum_{i=1}^{J}\sum_{k\in\mathbf{Z}} d_{i,k}\psi_{i,k}(t),\qquad J\geqslant 1 \tag{4.90}$$

式中

$$f_J(t) = \sum_k c_{J,k}\varphi_{J,k}(t) \tag{4.91}$$

$$c_{J,k} = \langle f, \tilde{\varphi}_{J,k}\rangle \tag{4.92}$$

$$d_{i,k} = \langle f, \tilde{\psi}_{i,k}\rangle \tag{4.93}$$

类似正交小波变换，双正交小波变换也有快速计算的 Mallat 算法，不过此时有两对滤波器 $\{h_k, g_k\}$ 和 $\{\tilde{h}_k, \tilde{g}_k\}$。利用式(4.90) 对 $f(t)$ 进行分解(即求分解系数，也称进行小波变换)时，可选 $\{\tilde{h}_k, \tilde{g}_k\}$ 作为滤波器组；而重构 $f(t)$ 时，可选 $\{h_k, g_k\}$ 作为滤波器组。

分解算法公式(设 $\{h_n, \tilde{h}_k\}$ 为实数序列)

$$\left.\begin{aligned} c_{j+1,k} &= \sum_{n\in\mathbf{Z}} c_{j,n}\tilde{h}_{n-2k}, \quad k\in\mathbf{Z} \\ d_{j+1,k} &= \sum_{n\in\mathbf{Z}} c_{j,n}\tilde{g}_{n-2k}, \quad k\in\mathbf{Z} \end{aligned}\right\} \tag{4.94}$$

重构算法公式

$$c_{j,k} = \sum_{n\in\mathbf{Z}} c_{j+1,n}h_{k-2n} + \sum_{n\in\mathbf{Z}} d_{j+1,n}g_{k-2n}, \quad k\in\mathbf{Z} \tag{4.95}$$

小　结

本章重点讨论由滤波器构造紧支集正交小波和对称双正交小波的有关问题。从侧重于小波的应用来说，主要想通过构造过程的简述，对实际使用的图表中出现的符号能正确理解，因而对构造方法不必深究。对于想研究小波理论的读者来说，本章介绍的仅是框架式的内容，其详细过程请参阅相关文献。

(1) 由 $H(\omega)$ 构造 $L^2(\mathbf{R})$ 的正交小波基，$H(\omega)$ 应满足的充分条件(即 4.1.1 段的充分条件 2) 有 3 条。

1) $|H(\omega)|^2 + |H(\omega+\pi)|^2 = 1$；

2) $H(0) = 1$；

3) $H(\omega) = \left(\dfrac{1+e^{-i\omega}}{2}\right)^N L(e^{-i\omega})$；

其中，$N > 1$，$L(z)$ 是关于 $z = e^{-i\omega}$ 的多项式，且 $|L(e^{-i\omega})|$ 有界(对 $\forall\omega$)。

(2) 构造紧支集正交小波的 Daubechies 方法(见定理 4.1)，关键是确定有限长度的滤波器 $\{h_k\}_{k=0}^{2N-1}$。其主要步骤如下：

1) 设 $\{h_k\}$ 为有限长度的实数序列，令

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=0}^{2N-1} h_k e^{-i\omega k} \tag{1}$$

又

$$H(\omega) = \left(\frac{1+e^{-i\omega}}{2}\right)^N L(e^{-i\omega}) \tag{2}$$

式中，$L(e^{-i\omega})$ 是 $N-1$ 次多项式；

2) 令

$$|L(e^{-i\omega})|^2 = \sum_{k=0}^{N-1}\binom{N-1+k}{k}\sin^{2k}\frac{\omega}{2} \tag{3}$$

又设 $L(z) = \sum\limits_{n=0}^{N-1} a_n z^n$，代入式(3)，比较两端 $\sin\dfrac{\omega}{2}$ 的同次幂系数，可得 a_n，$n = 0,1,\cdots,N-1$；

3) 将 $L(z)$ 的表达式代入式(2) 等号右端，将式(1) 代入式(2) 等号左端，通过比较式(2) 等号两端 z 的同次幂系数可得 $\{h_k\}$；

4) 令 $g_k=(-1)^{1-k}h_{1-k}$，可得 $\{g_k\}$。

按上述方法得到的 $\{h_k,g_k\}$ 是共轭正交滤波器组，是与尺度函数 φ 和小波 ψ 相对应的滤波器组。

(3) 双正交小波。设 $\varphi(t),\tilde{\varphi}(t)\in L^2(\mathbf{R})$，若

$$\langle\varphi(t-k),\tilde{\varphi}(t-n)\rangle=\delta_{k,n},\quad k,n\in\mathbf{Z}\tag{4}$$

则称 φ 与 $\tilde{\varphi}$ 是双正交的。

由双正交的 φ 与 $\tilde{\varphi}$ 可以生成 $L^2(\mathbf{R})$ 的两个正交的 MRA$\{V_j,\varphi\}$ 与 $\{\tilde{V}_j,\tilde{\varphi}\}$，$V_j$ 的 Riesz 基由 φ 经伸缩与平移构成，即

$$\{\varphi_{j,k}(t)=2^{-j/2}\varphi(2^{-j}t-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}\tag{5}$$

同样，$\tilde{V}_j$ 的 Riesz 基由 $\tilde{\varphi}$ 经伸缩与平移构成，即

$$\{\tilde{\varphi}_{j,k}(t)=2^{-j/2}\tilde{\varphi}(2^{-j}t-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}\tag{6}$$

由于 $V_j\perp\tilde{V}_j$，以及由 MRA 导出的空间分解式

$$V_j=V_{j+1}+W_{j+1}\tag{7}$$

$$\tilde{V}_j=\tilde{V}_{j+1}+\tilde{W}_{j+1}\tag{8}$$

不难得到 $\tilde{W}_j\perp V_j$，$W_j\perp\tilde{V}_j$，$W_j\perp\tilde{W}_j$。

W_j 和 $\tilde{W}_j$ 的 Riesz 基分别是

$$\{\psi_{j,k}(t)=2^{-j/2}\psi(2^{-j}t-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}\tag{9}$$

$$\{\tilde{\psi}_{j,k}(t)=2^{-j/2}\tilde{\psi}(2^{-j}t-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}\tag{10}$$

由以上关系不难得到双正交的尺度函数和小波具有以下性质：

$$\left.\begin{aligned}&\langle\varphi_{j,k},\tilde{\varphi}_{l,n}\rangle=\delta_{j,l}\delta_{k,n}\\&\langle\psi_{j,k},\tilde{\psi}_{l,n}\rangle=\delta_{j,l}\delta_{k,n}\\&\langle\psi_{j,k},\tilde{\varphi}_{j,n}\rangle=0\\&\langle\tilde{\psi}_{j,k},\varphi_{j,n}\rangle=0\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

在双正交情况下，φ 和 ψ，$\tilde{\varphi}$ 和 $\tilde{\psi}$ 对应的滤波器组分别是 $\{h_k,g_k\}$ 与 $\{\tilde{h}_k,\tilde{g}_k\}$。双尺度方程是

$$\left.\begin{aligned}\varphi(t)&=\sqrt{2}\sum_{k\in\mathbf{Z}}h_k\varphi(2t-k)\\\psi(t)&=\sqrt{2}\sum_{k\in\mathbf{Z}}g_k\varphi(2t-k)\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\varphi}(t)&=\sqrt{2}\sum_{n\in\mathbf{Z}}\tilde{h}_n\tilde{\varphi}(2t-n)\\\tilde{\psi}(t)&=\sqrt{2}\sum_{n\in\mathbf{Z}}\tilde{g}_n\tilde{\varphi}(2t-n)\end{aligned}\right\}\tag{13}$$

(4) 双正交小波完全可以由 φ 和 $\tilde{\varphi}$ 对应的滤波器 $H(\omega)$ 和 $\tilde{H}(\omega)$ 所确定，这里要求 $H(\omega)$ 和 $\tilde{H}(\omega)$ 满足如下条件

$$\bar{H}(\omega)\tilde{H}(\omega)+\bar{H}(\omega+\pi)\tilde{H}(\omega+\pi)=1 \tag{14}$$

而且还要求 ψ 和 $\tilde{\psi}$ 的滤波器 $G(\omega)$ 和 $\tilde{G}(\omega)$ 满足如下条件

$$\left.\begin{aligned}\bar{G}(\omega)\tilde{H}(\omega)+\bar{G}(\omega+\pi)\tilde{H}(\omega+\pi)=0\\ \tilde{G}(\omega)\bar{H}(\omega)+\tilde{G}(\omega+\pi)\bar{H}(\omega+\pi)=0\\ \bar{G}(\omega)\tilde{G}(\omega)+\bar{G}(\omega+\pi)\tilde{G}(\omega+\pi)=1\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

应用中常取

$$\left.\begin{aligned}G(\omega)=\mathrm{e}^{-i\omega}\bar{\tilde{H}}(\omega+\pi)\\ \tilde{G}(\omega)=\mathrm{e}^{-i\omega}\bar{H}(\omega+\pi)\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

(5) 紧支集对称双正交小波的构造。由于双正交小波完全由一对滤波器$\{h_n,\tilde{h}_k\}$所确定，因此欲构造紧支集对称双正交小波，除$\{h_n\}$和$\{\tilde{h}_k\}$的频域形式 $H(\omega)$ 和 $\tilde{H}(\omega)$ 应满足式(14)外，$\{h_n\}$ 和$\{\tilde{h}_k\}$还应满足长度是有限的且是实对称的。

具体构造$\{h_n,\tilde{h}_k\}$的主要过程是：

(Ⅰ) 设$\{h_n\}$，$\{\tilde{h}_k\}$的长度为奇数。

1) 平移下标，对称性写成 $h_n=h_{-n}$，$H(\omega)$ 表示成

$$H(\omega)=\frac{1}{2}h_0+\frac{2}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{M}h_n\cos n\omega \tag{17}$$

2) 由于 $H(\pi)=0$，π 应是 $H(\omega)$ 的 $2K$ 阶零点，由此设

$$H(\omega)=\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2K}Q(\cos\omega) \tag{18}$$

式中，Q 是一个多项式。同样，可设

$$\tilde{H}(\omega)=\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2\tilde{K}}\tilde{Q}(\cos\omega) \tag{19}$$

3) 将 $H(\omega)$ 和 $\tilde{H}(\omega)$ 代入式(14)，得

$$\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2L}\bar{Q}(\cos\omega)\tilde{Q}(\cos\omega)+\left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^{2L}\bar{Q}(-\cos\omega)\tilde{Q}(-\cos\omega)=1$$

这里 $L=K+\tilde{K}$。

令

$$\bar{Q}(\cos\omega)\tilde{Q}(\cos\omega)=R\left(\sin^2\frac{\omega}{2}\right) \tag{20}$$

经理论推导，在一定条件下，有

$$R\left(\sin^2\frac{\omega}{2}\right)=\sum_{j=0}^{L-1}\begin{pmatrix}L-1+j\\ j\end{pmatrix}\sin^{2j}\frac{\omega}{2} \tag{21}$$

（Ⅱ）设$\{h_n\}$，$\{\tilde{h}_k\}$的长度为偶数。此情形下，类似长度为奇数的过程，可得到式(21)，仅不同的是，此时$L=K+\tilde{K}+1$。

4）式(21)代入式(20)右端，得

$$\bar{\tilde{Q}}(\cos\omega)\tilde{Q}(\cos\omega)=\sum_{j=0}^{L-1}\begin{pmatrix}L-1+j\\ j\end{pmatrix}\sin^{2j}\frac{\omega}{2} \tag{22}$$

选择$\tilde{Q}(\cos\omega)\equiv 1$，由式(18)、式(19)，有

$$H(\omega)=\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2K}\sum_{j=0}^{L-1}\begin{pmatrix}L-1+j\\ j\end{pmatrix}\sin^{2j}\frac{\omega}{2} \tag{23}$$

$$\tilde{H}(\omega)=\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2\tilde{K}} \tag{24}$$

5）取$K=1,\tilde{K}=1$，确定L。将式(23)、式(24)右端化成$e^{-i\omega}$的多项式，$H(\omega)$和$\tilde{H}(\omega)$的时域形式便已得出，即$\{h_n\}$和$\{\tilde{h}_k\}$已确定出。

对于$K=1,\tilde{K}=2$等各种组合取法，分别确定出$L(L=K+\tilde{K}$，或$K+\tilde{K}+1)$，从而确定出相应的$\{h_n\}$和$\{\tilde{h}_k\}$。

6）取$g_n=(-1)^{1-n}h_{1-n},\tilde{g}_k=(-1)^{1-k}\tilde{h}_{1-k}$，可得滤波器组$\{h_n,g_n\}$和$\{\tilde{h}_k,\tilde{g}_k\}$。由双尺度方程进而可构造紧支对称的双正交小波。

(6) 双正交小波变换及Mallat算法。在$L^2(\mathbf{R})$中有了双正交小波基以后，$f(t)$可用两个小波级数表示：

$$f(t)=\sum_{j,k}d_{j,k}\psi_{j,k}(t)=\sum_{j,k}\tilde{d}_{j,k}\tilde{\psi}_{j,k}(t) \tag{25}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}d_{j,k}&=\langle f,\tilde{\psi}_{j,k}\rangle\\ \tilde{d}_{j,k}&=\langle f,\psi_{j,k}\rangle\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

称为$f(t)$的双正交小波变换。

设$f(t)\in V_0$，$f(t)$有分解式

$$f(t)=f_1(t)+\sum_{k\in\mathbf{Z}}d_{1,k}\psi_{1,k}(t)=f_J(t)+\sum_{i=1}^{J}\sum_{k\in\mathbf{Z}}d_{i,k}\psi_{i,k}(t),\quad J\geqslant 1 \tag{27}$$

式中

$$f_J(t)=\sum_k c_{J,k}\varphi_{J,k}(t) \tag{28}$$

$$c_{J,k} = \langle f, \tilde{\varphi}_{J,k} \rangle \tag{29}$$

$d_{J,k}$ 见式(26)。

双正交小波变换的 Mallat 算法

设$\{h_n, \tilde{h}_k\}$为实数序列，则有下面的分解算法公式和重构算法公式：

$$\left.\begin{aligned} c_{j+1,k} &= \sum_n c_{j,n}\tilde{h}_{n-2k} \\ d_{j+1,k} &= \sum_n c_{j,n}\tilde{g}_{n-2k} \end{aligned}\right\}, \quad k \in \mathbf{Z} \tag{30}$$

$$c_{j,k} = \sum_n c_{j+1,n}h_{k-2n} + \sum_n d_{j+1,n}g_{k-2n}, \qquad k \in \mathbf{Z} \tag{31}$$

分解与重构分别用两组滤波器$\{\tilde{h}_n, \tilde{g}_n\}$和$\{h_n, g_n\}$。

习　题

1. 证明：若 $\varphi(t)$ 是正交尺度函数，则有 $\sum_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t-k) = 1$。

2. 利用定理4.1，求出 $N=3$ 时的 Daubechies 小波的滤波器$\{h_n\}$，$n=0,1,\cdots,5$(用无理数表示)。

3. 设滤波器$\{h_k\}$和$\{\tilde{h}_n\}$的长度为偶数，计算 $K=1, \tilde{K}=1$ 情形下$\{h_n\}$和$\{\tilde{h}_n\}$。

4. 证明：当且仅当滤波器$\{h_n\}$具有紧支集时，尺度函数 φ 具有紧支集，且两者的支集长度相等；如果 φ 的支集长度为$[0,N]$，那么 ψ 的支集是$\left[\frac{-N+1}{2}, \frac{N+1}{2}\right]$。

5. 令 $f(t)$ 由下式定义

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \bar{\in} [0,1] \\ t(1-t), & t \in [0,1] \end{cases}$$

对 f 在二进点 $k \times 2^{-8}$，$k=-256,\cdots,512$ 上采样。应用 $N=2$ 的 Daubechies 小波 ψ_2，实现一个一级分解。画出一级分解后的小波系数幅度图。

第5章 小波基的进一步认识及推广

在前两章中已经知道，可以构造小波 $\psi(t)$，使得 $\psi(t)$ 的伸缩与平移函数族

$$\{\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2}\psi(2^{-j}t - k)\}_{j,k\in\mathbf{Z}} \tag{5.1}$$

构成 $L^2(\mathbf{R})$ 的一组规范正交基。由于小波 $\psi(t)$ 与函数族式(5.1) 的这种关系，常说的小波基可以是 $\psi(t)$，也可以是族式(5.1)。

关于小波基的特性，前几章中已经介绍过一些，例如，Haar 小波基虽然具有正交性，但它的光滑性太差；其他一些小波基，具有光滑性、正交性、紧支(集) 性、对称性、双正交性等。在实际应用中，根据不同的目的，需要选择不同的小波基。大多数的应用中，主要利用小波基可以用较少的非零系数去有效地逼近实际函数的能力。所谓最优小波基，是指函数 $f(t)$ 用小波级数表示或重构时，其小波系数中有最多的接近于零的系数。而小波基的这种能力主要依赖于其数学特性：正则性、消失矩、紧支性、对称性和正交性等。本章简要地介绍这些性质，给出选择小波基时应考虑的数学因素。另外将小波基给予推广，使得读者对小波基能有一些更多的更有用的了解。

5.1 小波基的数学特征

本小节在前两章的基础上，再介绍关于小波基的两个重要特征。

5.1.1 正则性

正则性一般用来刻画函数的奇异性或光滑程度。因此必须对函数的正则性给予精确的量化，通常用 Lipschitz 指数 α 来度量函数的正则性。

定义 5.1 关于 Lipschitz 指数 α 的定义

(1) 函数 $f(t)$ 在点 t_0 具有点态的(或局部)Lipschitz 指数 $\alpha(\alpha \geqslant 0)$，如果存在 $K > 0$ 和一个 $n = \lfloor\alpha\rfloor$ 次多项式 $P_{t_0}(t)$，使得

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad |f(t) - P_{t_0}(t)| \leqslant K|t - t_0|^{\alpha} \tag{5.2}$$

(2) 函数 $f(t)$ 在区间$[a,b]$上具有一致 Lipschitz 指数 $\alpha(\geqslant 0)$，如果对于 $\forall t_0 \in [a,b]$，都具有点态 Lipschitz 指数 α，其中常数 K 与 t_0 无关。

从以上定义可以看出，Lipschitz 指数描述了函数 $f(t)$ 与多项式的近似程度。因为如果 $f(t)$ 在区间 $[t_0-h, t_0+h]$ 上是 n 次可微的，设 $P_{t_0}(t)$ 是 $f(t)$ 在 t_0 处的 Taylor 展开式的前 n 项：

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!}(t-t_0)^k$$

则由 Taylor 公式可知，误差 $f(t)-P_n(t)$ 满足

$$|f(t)-P_n(t)| \leqslant \sup_{\xi\in[t_0-h, t_0+h]} |f^{(n)}(\xi)| \frac{|t-t_0|^n}{n!}$$

即在 t_0 附近，$f(t)$ 与 $P_{t_0}(t)$ 误差的上界可以通过非整数 Lipschitz 指数 α 来描述。

当 $0 \leqslant \alpha < 1$ 时，$P_{t_0}(t) = f(t_0)$，则式(5.2) 成为

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad |f(t)-f(t_0)| \leqslant K|t-t_0|^\alpha \tag{5.3}$$

由式(5.3) 可知，当 $\alpha = 0$ 时，f 在点 t_0 处有界但不连续。$0<\alpha<1$ 时，f 在点 t_0 处连续但不可微。

当 $\alpha \geqslant 0$ 时，有 $n = \lfloor\alpha\rfloor \geqslant 0$。如果 $f(t)$ 在 $[a,b]$ 上具有一致的 Lipschitz 指数 α，则 $f(t)$ 一定是 n 次可微的。函数 $f(t)$ 的 Lipschitz 指数 α 称为 $f(t)$ 的正则性指数，正则性指数越高，函数越光滑。

当 $f(t)$ 在 $\mathbf{R}$ 上具有一致的 Lipschitz 指数 α，则称 $f(t)$ 属于 C^α 类函数。以后把 Lipschitz 指数 α 简记为 $L-\alpha$，f 的正则性称为 Lipschitz 正则性。

对小波基 $\psi(t)$ 要求有一定的正则性，主要是为了由小波系数重构信号时具有稳定性。由于 $\psi(t)$ 是由 $\varphi(t)$ 经平移的线性组合构成的，所以 $\varphi(t)$ 与 $\psi(t)$ 具有相同的正则性。

5.1.2 消失矩

定义 5.2 小波函数 $\psi(t)$ 具有 m 阶消失矩，如果

$$\int_{\mathbf{R}} t^k \psi(t)\mathrm{d}t = 0, \quad 0 \leqslant k < m \tag{5.4}$$

由上面的定义可知，具有 m 阶消失矩的小波与 $m-1$ 阶多项式内积为零。因此小波的消失矩越高，光滑函数在小波展开式中的系数为零(或近似为零) 的个数就越多。

在前一段关于 f 的 Lipschitz 指数 α 定义的分析中已经知道，若 f 具有 $L-\alpha$，则在 t_0 的某个邻域内，f 可以用多项式 P_{t_0} 来逼近

$$f(t) = P_{t_0}(t) + \varepsilon_{t_0}(t) \tag{5.5}$$

式中

$$|\varepsilon_{t_0}(t)| = |f(t)-P_{t_0}(t)| \leqslant K|t-t_0|^\alpha$$

现在使用具有 $m(m>\alpha)$ 阶消失矩的小波 $\psi(t)$，由于 $\alpha<m$，所以 P_{t_0} 至多是 $m-1$ 阶

多项式，从而有

$$(WP_{t_0})(a,b)=\int_{-\infty}^{+\infty}P_{t_0}(t)\frac{1}{\sqrt{a}}\bar{\psi}\left(\frac{t-b}{a}\right)\mathrm{d}t=0$$

再由式(5.5)，可推出

$$(Wf)(a,b)=(W\epsilon_{t_0})(a,b) \tag{5.6}$$

式(5.6)右端已消去了多项式 P_{t_0}。

式(5.6)可以用来估计 $f(t)$ 的 $L-\alpha$，这说明消失矩与局部正则性有关。利用小波变换和 $L-\alpha$ 如何检测函数奇异性的类型等问题，将在第 6 章中讨论。

Mallat 在文献[4]中指出，小波 $\psi(t)$ 的正则性与其消失矩是有关系的。这里仅指出一个明显的结论：样条小波和 Daubechies 小波的正则性会随着消失矩阶数的增加而提高。

有关消失矩特性的一些结论可参见书后所列文献。

5.1.3　其他数学特性

紧支性、对称性、正交性和双正交性，都是小波的数学特性之一，在第 4 章中已经讨论过，这里不再重复。这里仅对有关对称性与线性相位的关系作一些补充。

定义 5.3　设 $\{a_n\}\in l^1$ 是实值序列，$A(\omega)$ 是它的 Fourier 变换，即

$$A(\omega)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}a_n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega}$$

如果 $A(\omega)$ 可以表示为

$$A(\omega)=\pm|A(\omega)|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}l\omega},\qquad\forall\omega\in\mathbf{R} \tag{5.7}$$

式中，$l\in\frac{1}{2}\mathbf{Z}$，$|A(\omega)|$ 是实数，则称 $A(\omega)$ 具有线性相位。

式(5.7)中的 l 称为 $A(\omega)$ 的相位，它是 ω 的线性函数，而式右端的正负号与 ω 无关。

定义 5.4　对序列 $\{a_n\}$，如果其 Fourier 变换 $A(\omega)$ 可以表示为

$$A(\omega)=B(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(l\omega+b)} \tag{5.8}$$

这里 $B(\omega)$ 是某个实值函数，$l\in\frac{1}{2}\mathbf{Z}$，$b\in\mathbf{R}$，则称 $A(\omega)$ 具有广义线性相位。

式(5.8)中的 l 称为 $A(\omega)$ 的相位，它是 ω 的分段线性函数。

对于函数 $f(t)\in L^2(\mathbf{R})$，如果它的 Fourier 变换满足式(5.7)或式(5.8)，则称 $f(t)$ 具有线性相位(或广义线性相位)。

定理 5.1

(1) 一个实值序列 $\{a_n\}$ 关于它的 Fourier 变换的相位 l 是对称的或反对称的，即 $a_k=\pm a_{2l-k}$，充要条件是 $A(\omega)=\sum_n a_n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega}$ 具有广义线性相位。

(2) 一个实值函数 $f\in L^2(\mathbf{R})$ 具有广义线性相位，充要条件是 f 关于 $\hat{f}$ 的相位是对称

的或反对称的。

共轭镜像 FIR 滤波器都是非线性相位的，甚至不具备广义线性相位。

为了获得对称性，人们做了大量的工作。实践证明，在单小波（小波基由一个函数的平移与伸缩生成）情形不可能很好地解决这个问题。20 世纪 90 年代后期产生的多小波理论，可以解决这个问题。

5.2 B-样条小波

5.2.1 B-样条函数简介

先引人"基数样条"空间的概念。m（正整数）阶具有整数节点的基数样条空间，是所有在任一区间$[k,k+1]$上次数不超过 $m-1$ 次的代数多项式构成的集合。

一阶基数 B-样条 $N_1(t)$ 是单位区间$[0,1]$的特征函数，即

$$N_1(t)=\chi_{[0,1)}(t)=\begin{cases}1, & t\in[0,1)\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{5.9}$$

而对于 $m\geqslant 1$，$N_m(t)$ 用卷积递推定义，即

$$N_m(t)\overset{\text{def}}{=\!=}(N_{m-1}*N_1)=\int_0^t N_{m-1}(t-x)\mathrm{d}x \tag{5.10}$$

也可以用对函数$\dfrac{1}{(m-1)!}x_+^{m-1}$ 进行 m 阶差分来定义，即

$$N_m(t)\overset{\text{def}}{=\!=}\frac{1}{(m-1)!}\Delta^m x_+^{m-1}=\frac{1}{(m-1)!}\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}(-1)^j(x-j)_+^{m-1} \tag{5.11}$$

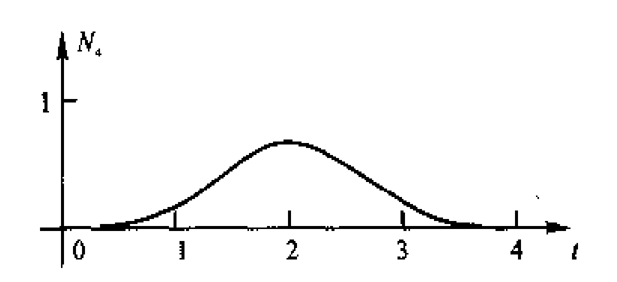
式中，$x_+=\max\{x,0\}$

容易证明，$N_m(t)$ 是基数样条函数。

下面是 4 阶 B-样条函数的表达式及图形（见图 5.1）。

$$N_4(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{6}t^3, & t\in[0,1)\\ -\dfrac{1}{2}t^3+2t^2-2t+\dfrac{2}{3}, & t\in[1,2)\\ \dfrac{1}{2}t^3-4t^2+10t-\dfrac{22}{3}, & t\in[2,3)\\ -\dfrac{1}{6}t^3+2t^2-8t+\dfrac{32}{3}, & t\in[3,4)\end{cases}$$

将对称中心移至原点，$N_4(t)$ 的表达式为



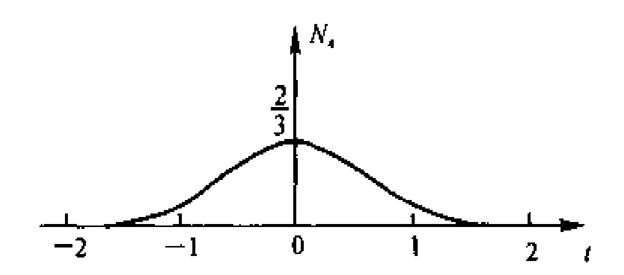


图 5.1　4 阶 B-样条函数

$$N_4(t)=\begin{cases}0, & |t|\geqslant 2\\ \dfrac{1}{2}|t|^3-t^2+\dfrac{2}{3}, & |t|\leqslant 1\\ -\dfrac{1}{6}|t|^3+t^2-2|t|+\dfrac{4}{3}, & 1<|t|\leqslant 2\end{cases}$$

样条函数 $N_m(t)$ 的基本性质如下：

(1) 支撑区间是$[0,m]$，关于它的支撑中心是对称的，即

$$N_m\left(\frac{m}{2}+t\right)=N_m\left(\frac{m}{2}-t\right),\quad t\in \mathbf{R} \tag{5.12}$$

(2)
$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{N_m(t-k)}=1,\quad \text{对任意 } \mathrm{t}\in \mathbf{R} \tag{5.13}$$

(3)
$$N'_m(t)=\Delta N_{m-1}(t)=N_{m-1}(t)-N_{m-1}(t-1) \tag{5.14}$$

(4) 递推关系

$$N_m(t)=\frac{t}{m-1}N_{m-1}(t)+\frac{m-t}{m-1}N_{m-1}(t-1) \tag{5.15}$$

(5)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)N_m(t)\mathrm{d}t=\int_0^1\cdots\int_0^1 f(t_1+t_2+\cdots+t_m)\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_m \tag{5.16}$$

(6)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} g^{(m)}(t)N_m(t)\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}g(k) \tag{5.17}$$

5.2.2　Battle – Lemarie 样条小波

取尺度函数为

$$\varphi(t)\xlongequal{\text{def}}\begin{cases}N_m\left(t+\dfrac{1}{2}m\right), & m\text{ 为偶数}\\ N_m\left(t+\dfrac{1}{2}(m-1)\right), & m\text{ 为奇数}\end{cases} \tag{5.18}$$

由 m 阶 B-样条函数的性质可知，φ 是支集为 $\left[-\frac{m}{2},\frac{m}{2}\right]$（$m$ 为偶数时）和 $\left[-\frac{m-1}{2},\frac{m+1}{2}\right]$（$m$ 为奇数）的 B-样条，$\varphi\in C^{m-1}(\mathbf{R})$。

由于 $\hat{N}_1(\omega)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}}\left[\dfrac{2\sin\frac{\omega}{2}}{\omega}\right]$，$N_m(t)$ 是 $N_1(t)$ 的 m 重卷积，因此有

$$\hat{N}_m(\omega)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\omega/2}\left[\frac{\sin\frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}\right]^m$$

由式(5.18)，不难得到

$$\hat{\varphi}(\omega)=\begin{cases}\left(\dfrac{2}{\omega}\sin\dfrac{\omega}{2}\right)^m, & m\text{ 为偶数}\\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}}\left(\dfrac{2}{\omega}\sin\dfrac{\omega}{2}\right)^m, & m\text{ 为奇数}\end{cases}$$

因此，相应的滤波器是

$$H(\omega)=\begin{cases}\left(\cos\dfrac{\omega}{2}\right)^m, & m\text{ 为偶数}\\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}}\left(\cos\dfrac{\omega}{2}\right)^m, & m\text{ 为奇数}\end{cases}\tag{5.19}$$

或者写成如下的形式：

$$H(\omega)=\begin{cases}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{m}{2}\omega}\left(\dfrac{1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}}{2}\right)^m, & m\text{ 为偶数}\\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{m-1}{2}\omega}\left(\dfrac{1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}}{2}\right)^m, & m\text{ 为奇数}\end{cases}$$

由于样条函数 $N_m(t)$ 的整数平移系不正交，所以式(5.18)定义的 $\varphi(t)$ 也不是平移正交系。事实上，当 $m>1$ 时，$\varphi(t)$ 相应的滤波器 $H(\omega)$ 不满足正交性的充要条件：$|H(\omega)|^2+|H(\omega+\pi)|^2=1$。因为

$$|H(\omega)|^2+|H(\omega+\pi)|^2=\left|\cos\frac{\omega}{2}\right|^{2m}+\left|\sin\frac{\omega}{2}\right|^{2m}\leqslant\left|\cos\frac{\omega}{2}\right|^2+\left|\sin\frac{\omega}{2}\right|^2=1,(m>1)$$

所以，对于 $\forall\omega\in[-\pi,\pi]$，有

$$0<|H(\omega)|^2+|H(\omega+\pi)|^2\leqslant 1$$

由定理 3.1 和定理 3.3，又有

$$A_m\leqslant\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{\varphi}(\omega+2k\pi)|^2\leqslant 1$$

式中，$0<A_m<1$，由 Riesz 基的概念可知，式(5.18) 定义的 φ 的平移系 $\{\varphi(t-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 是空间 V_0 的 Riesz 基。

下面，把 $\varphi(t)$ 正交化，令

$$\hat{\varphi}^{\#}(\omega)=\frac{\hat{\varphi}(\omega)}{\left(\sum_k|\hat{\varphi}(\omega+2k\pi)|^2\right)^{1/2}}$$

这样，以 $\varphi^{\#}(t)$ 为尺度函数，可以产生 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个正交的 MRA。相应的滤波器是

$$H^{\#}(\omega)=H(\omega)\left[\frac{\sum_k|\hat{\varphi}(\omega+2k\pi)|^2}{\sum_k|\hat{\varphi}(2\omega+2k\pi)|^2}\right]^{+}$$

再令

$$\hat{\psi}^{\#}(\omega)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}}\bar{H}^{\#}\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)\hat{\varphi}^{\#}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

得到 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个正交小波 $\psi^{\#}(t)$。该小波称为 m 阶($m-1$ 次)B-样条小波，或 Battle-Lemarie 样条小波。

B-样条小波没有分析表达式。由于正交化过程破坏了紧支性，因此 B-样条小波不是紧支集的，但是 B-样条小波 $\psi^{\#}$ 具有指数型衰减性[6,10]。此外 B-样条小波具有对称性。

图 5.2 ~ 图 5.5 为 B-样条小波和它的频谱图。

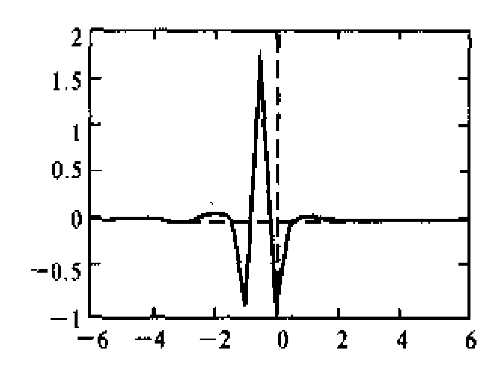
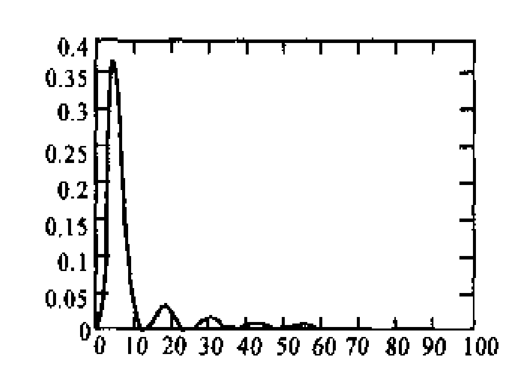



图 5.2　1 阶 B-样条小波和它的频谱

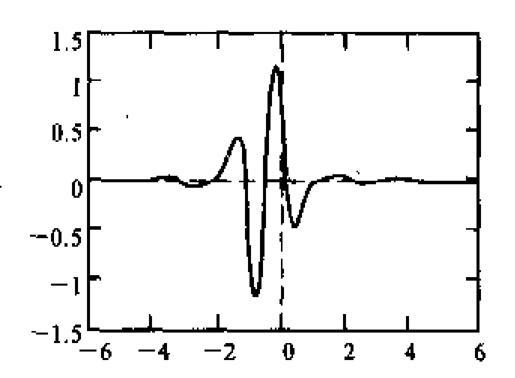
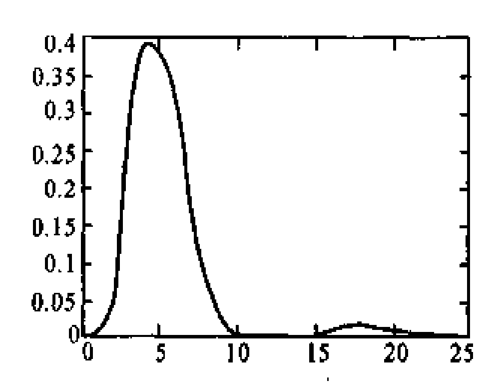



图 5.3　2 阶 B-样条小波和它的频谱

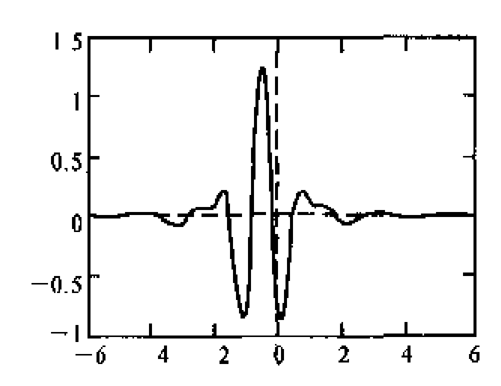
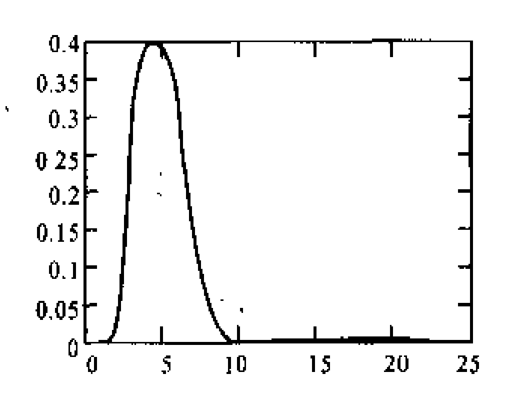



图 5.4　3 阶 B-样条小波和它的频谱

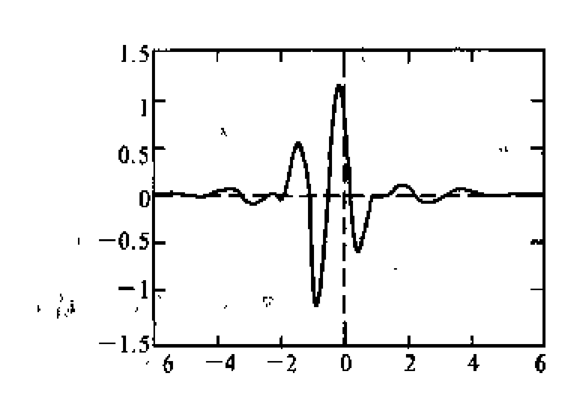
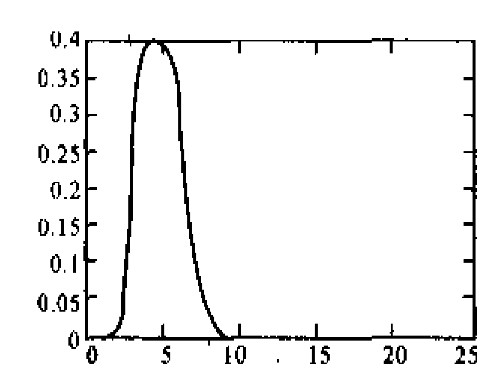



图 5.5　4 阶 B-样条小波和它的频谱

5.2.3　紧支样条小波

如前段，取尺度函数为 $N_m(t)$（m 阶基数 B-样条），定义 $\psi_m(t)$ 为

$$\psi_m(t) = \sum_{j=0}^{3m-2} q_j N_m(2t-j) \tag{5.20}$$

式中
$$q_j = \frac{(-1)^j}{2^{m-1}} \sum_{l=0}^{m} \begin{pmatrix} m \\ l \end{pmatrix} N_{2m}(j+1-l), \quad j = 0,1,\cdots,3m-2$$

式(5.20)定义的小波 $\psi_m(t)$ 具有以下性质：

(1) $\mathrm{supp}\psi_m = [0,2m-1]$；

(2) $\{\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2}\psi(2^{-j}t-k) \mid j,k \in \mathbf{Z}\}$，构成 $L^2(\mathbf{R})$ 的 Riesz 小波基；

(3) $\psi_m(t)$ 是对称的（m 为偶数）或反对称的（m 为奇数）（即 ψ_m 具有广义线性相位）。

$\psi_m(t)$ 的对偶小波 $\tilde{\psi}_m(t)$ 具有上述相同的性质。

图 5.6 ～ 图 5.8 给出了 2,4,5 阶的紧支样条小波 ψ_m 和相应的频谱，图 5.9 ～ 图 5.11 显示了 2,4,5 阶对偶小波 $\tilde{\psi}_m$ 和相应的频谱。

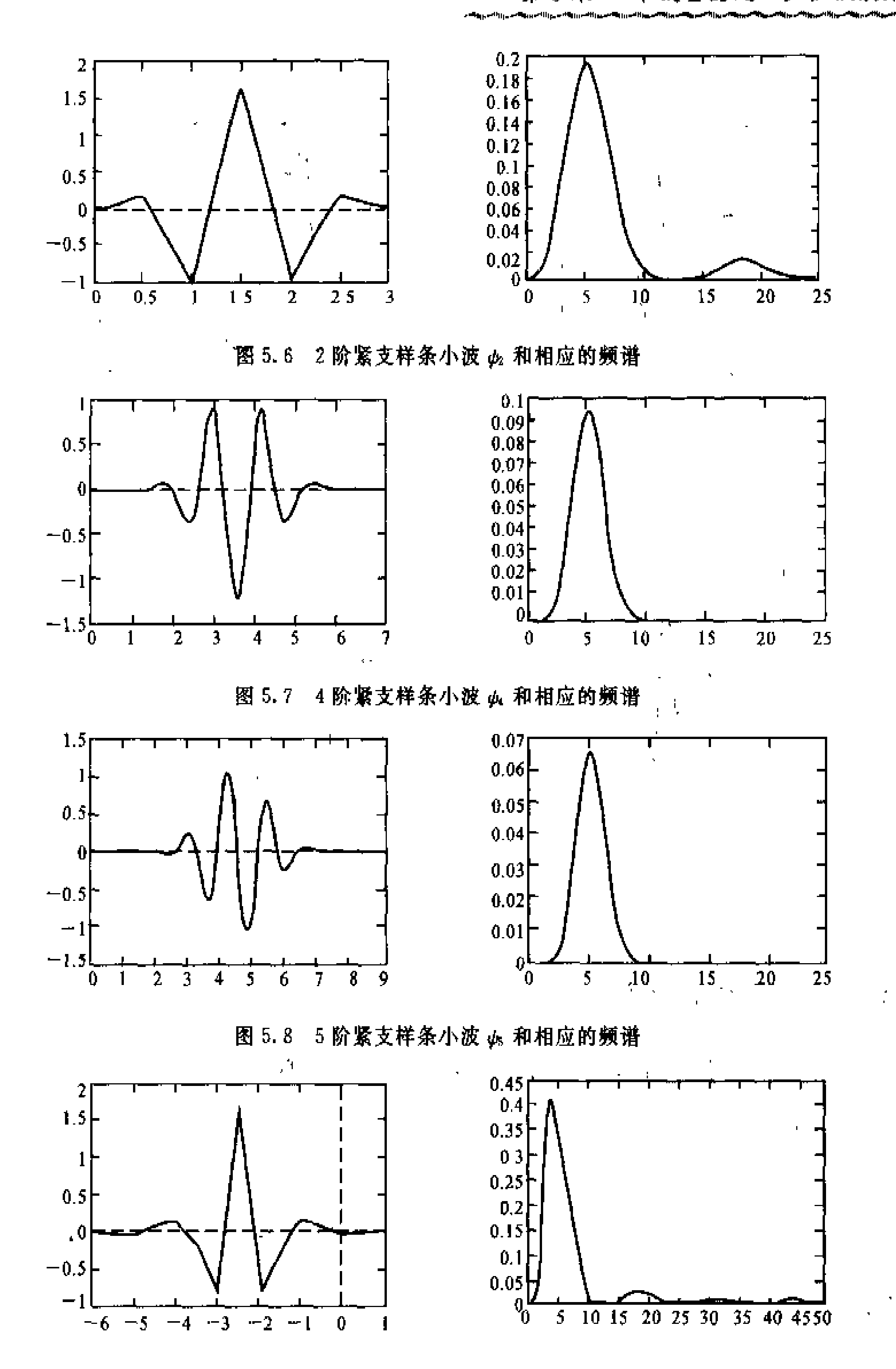


图 5.6　2 阶紧支样条小波 ψ_2 和相应的频谱

图 5.7　4 阶紧支样条小波 ψ_4 和相应的频谱

图 5.8　5 阶紧支样条小波 ψ_5 和相应的频谱

图 5.9　2 阶对偶样条小波 $\tilde{\psi}_2$ 及其频谱

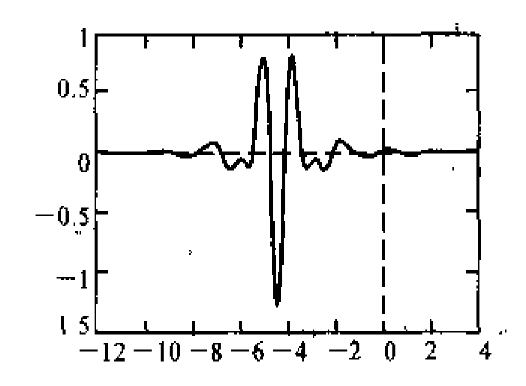
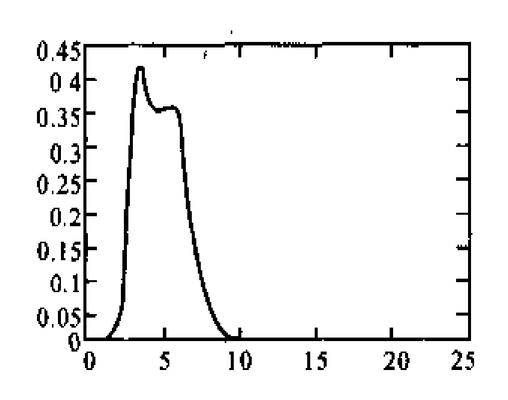



图 5.10　4 阶对偶样条小波 $\tilde{\psi}_4$ 及其频谱

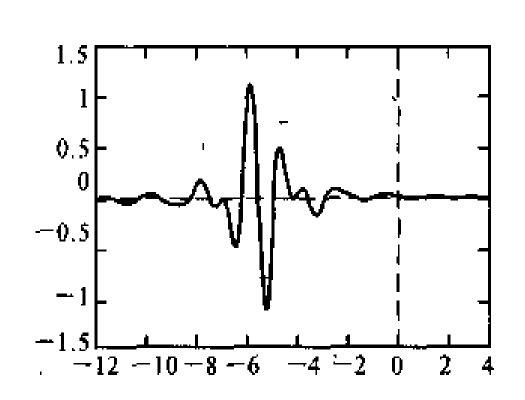
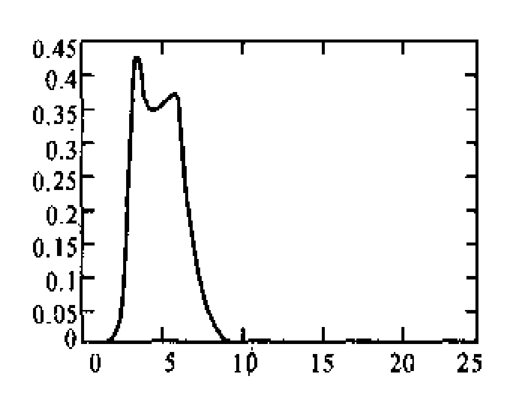



图 5.11　5 阶对偶样条小波 $\tilde{\psi}_5$ 及其频谱

5.2.4　双正交样条小波

本段介绍对称的双正交样条小波。如在 4.4 节中那样，选择 $\tilde{Q}(\cos\omega)=1$，代入式(4.78)，有

$$Q(\cos\omega)=\sum_{j=0}^{L-1}\begin{bmatrix}L-1+j\\ j\end{bmatrix}\left(\sin^2\frac{\omega}{2}\right)^j$$

由此可推出

$$\tilde{H}(\omega)=\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2\tilde{K}},\quad (\tilde{h}_n \text{ 的长度为奇数}) \tag{5.21}$$

或者

$$\tilde{H}(\omega) = e^{-i\frac{\omega}{2}}\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2\tilde{K}+1}, \quad (\tilde{h}_n \text{ 的长度为偶数}) \tag{5.22}$$

回忆 B-样条函数 $N_m(t)$ 的滤波器 $H(\omega)$ 的表示式(5.19)，可以知道这里的 $\tilde{\varphi}$ 是中心在 0 或$\frac{1}{2}$ 的 B-样条函数。

第一种情形，记 $N = 2K, \tilde{N} = 2\tilde{K}$

$$H(\omega) = \left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{N}\sum_{j=0}^{K+\tilde{K}-1}\begin{pmatrix}\tilde{K}+K-1+j \\ j\end{pmatrix}\left(\sin^2\frac{\omega}{2}\right)^j \tag{5.23}$$

第二种情形，记 $N = 2K+1, \tilde{N} = 2\tilde{K}+1$

$$H(\omega) = e^{-i\frac{\omega}{2}}\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{N}\sum_{j=0}^{K+\tilde{K}}\begin{pmatrix}K+\tilde{K}+j \\ j\end{pmatrix}\left(\sin^2\frac{\omega}{2}\right)^j \tag{5.24}$$

在两种情形中，K 均可任意选择，对于固定的 $\tilde{K}$，$\tilde{\varphi}(t)$ 就可确定。而 $\tilde{\psi},\varphi,\psi$ 与 $\tilde{N}$ 及 N 有关，所以常记为${}_{\tilde{N}}\tilde{\varphi}$，${}_{\tilde{N},N}\tilde{\psi}$，${}_{\tilde{N},N}\varphi$，${}_{\tilde{N},N}\psi$。只要 $\tilde{N},N$ 给定，就可确定出相应的 $\tilde{H}(\omega)$ 及 $H(\omega)$，再利用式(4.67)、式(4.68)，确定相应的 $\tilde{G}(\omega)$ 及 $G(\omega)$，从而得到 $\tilde{\psi},\psi$，这是双正交小波基，对称的而且是紧支集的。

图 5.12 ～ 图 5.14 分别画出了 $\tilde{N},N$ 最初几个取值对应的${}_{\tilde{N}}\tilde{\varphi}$，${}_{\tilde{N},N}\tilde{\psi}$，${}_{\tilde{N},N}\varphi$ 及${}_{\tilde{N},N}\psi$ 的图形。表 5.1 给出了对应的滤波器，列出了${}_{\tilde{N}}\tilde{H}(z)$，${}_{\tilde{N},N}H(z)$ 中 $\tilde{N},N$ 最初的几个值，$(z = e^{-i\omega}, \sum h_n = 1)$，可供读者查阅相关样条函数和小波的滤波器以及图形和支集等。进而由样条支集长度还可以判断该样条函数的阶数。例如${}_{1,3}\varphi$，其滤波器为

$$\{h_k \mid k = -2, -1, \cdots, 3\} = \left\{-\frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{16}\right\}$$

它是 5 阶样条。${}_{3,1}\varphi$ 的滤波器是

$$\{h_k \mid k = -1, 0, 1, 2\} = \left\{-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right\}$$

它是 3 阶样条。欲知相应小波的滤波器可用熟知的公式(4.67) 和式(4.68) 计算。

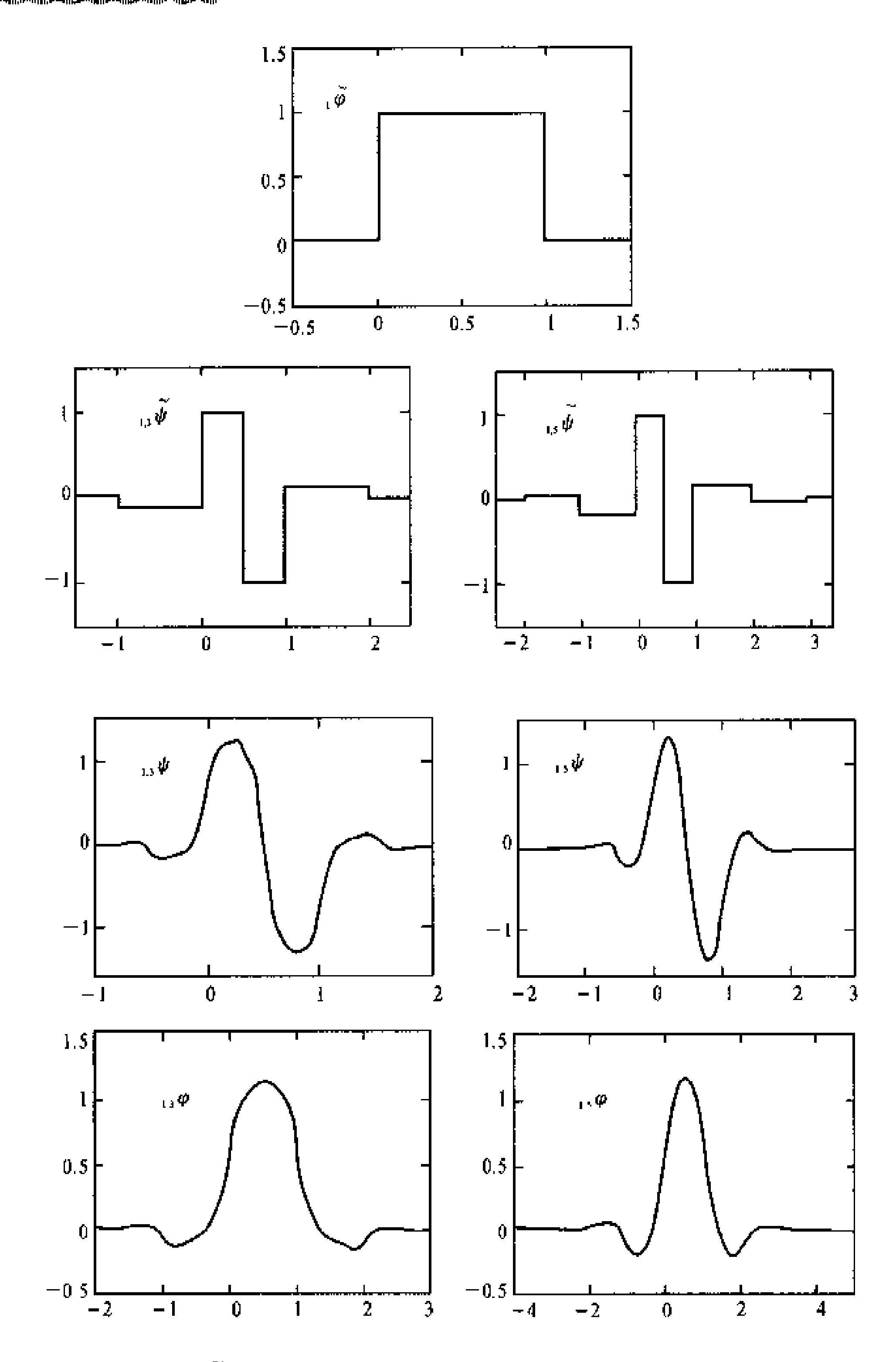


图 5.12 $\tilde{N}=1, N=3,5$ 的样条例子，$N=1$(无图) 是 Haar 基，

$\mathrm{Supp}_{1,N}\varphi=[-N+1,N]$ $\quad\mathrm{Supp}_{1,N}\psi=\mathrm{Supp}_{2,N}\tilde{\psi}=\left[-\frac{N-1}{2},\frac{N+1}{2}\right]$

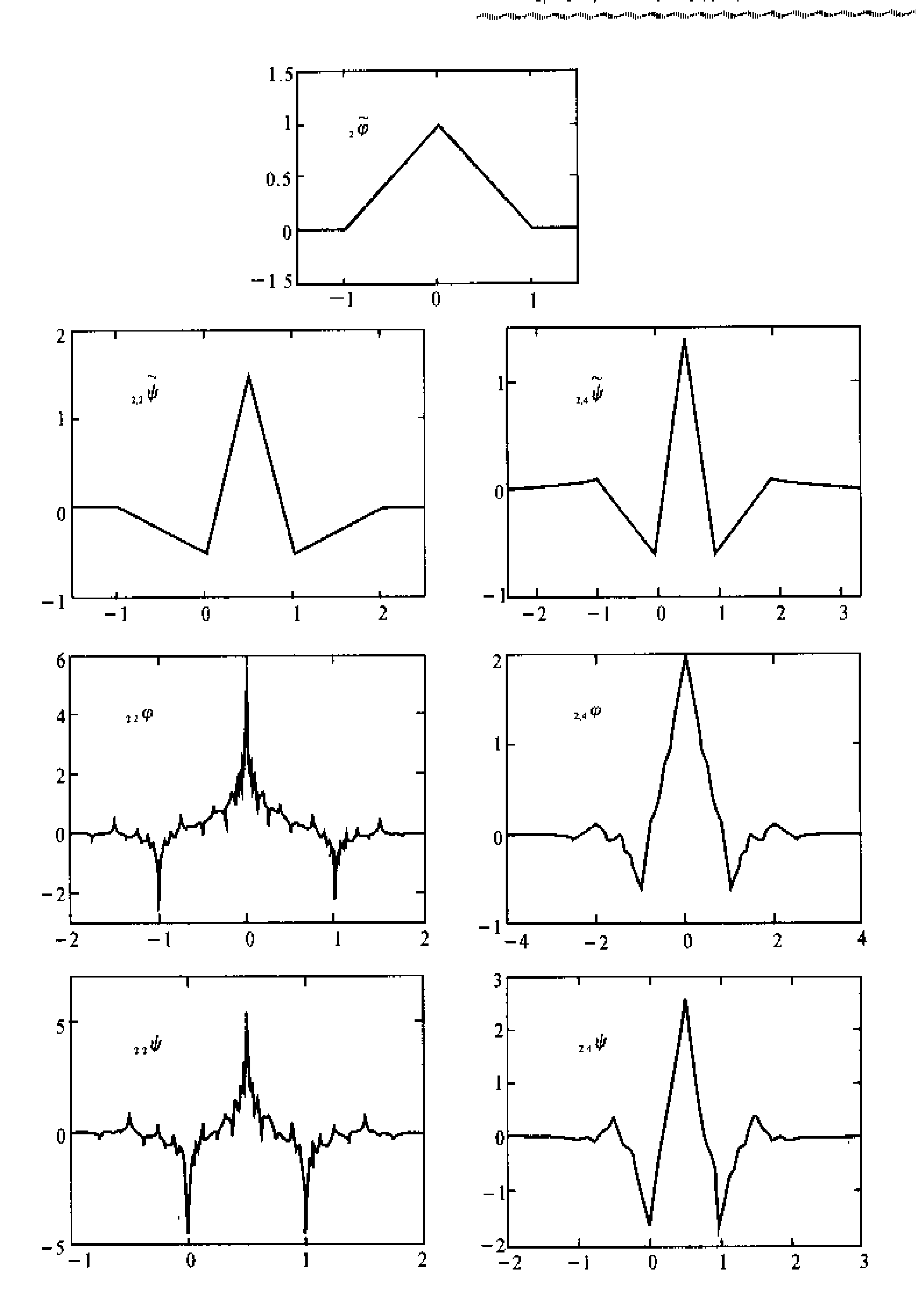


图 5.13　$\tilde{N}=2, N=2,4,6,8$ 的样条例子，$\mathrm{Supp}_{2,N}\varphi=[-N,N]$，

$$\mathrm{Supp}_{2,N}\psi=\mathrm{Supp}_{2,N}\tilde{\psi}=\left[-\frac{N}{2},\frac{N}{2}+1\right]$$

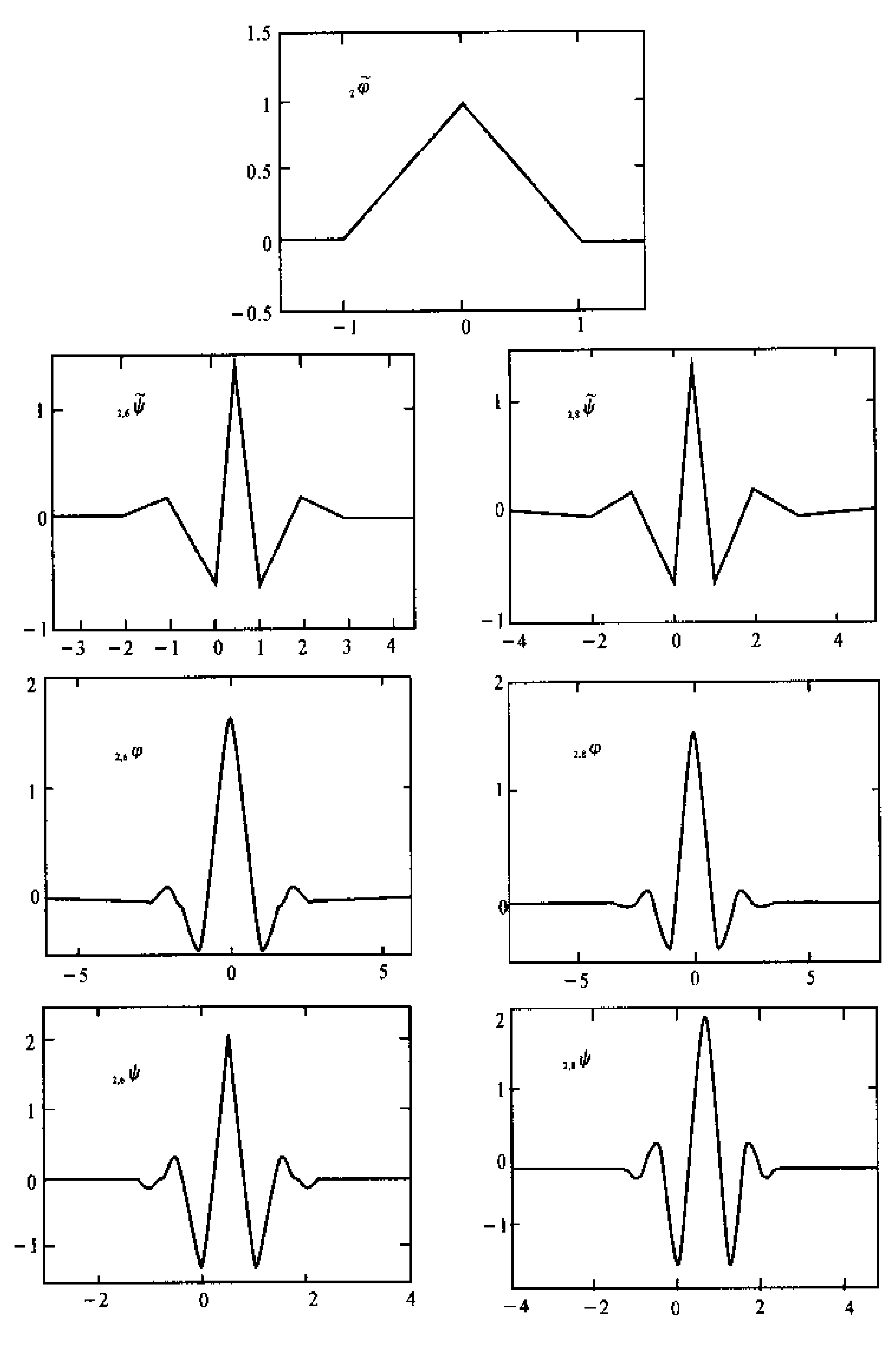


图 5.13(续) $\tilde{N}=2, N=3,4,6,8$ 的样条例子，$\mathrm{Supp}_{2,N}\varphi=[-N,N]$，

$$\mathrm{Supp}_{2,N}\psi=\mathrm{Supp}_{2,N}\tilde{\psi}=\left[-\frac{N}{2},\frac{N}{2}+1\right]$$

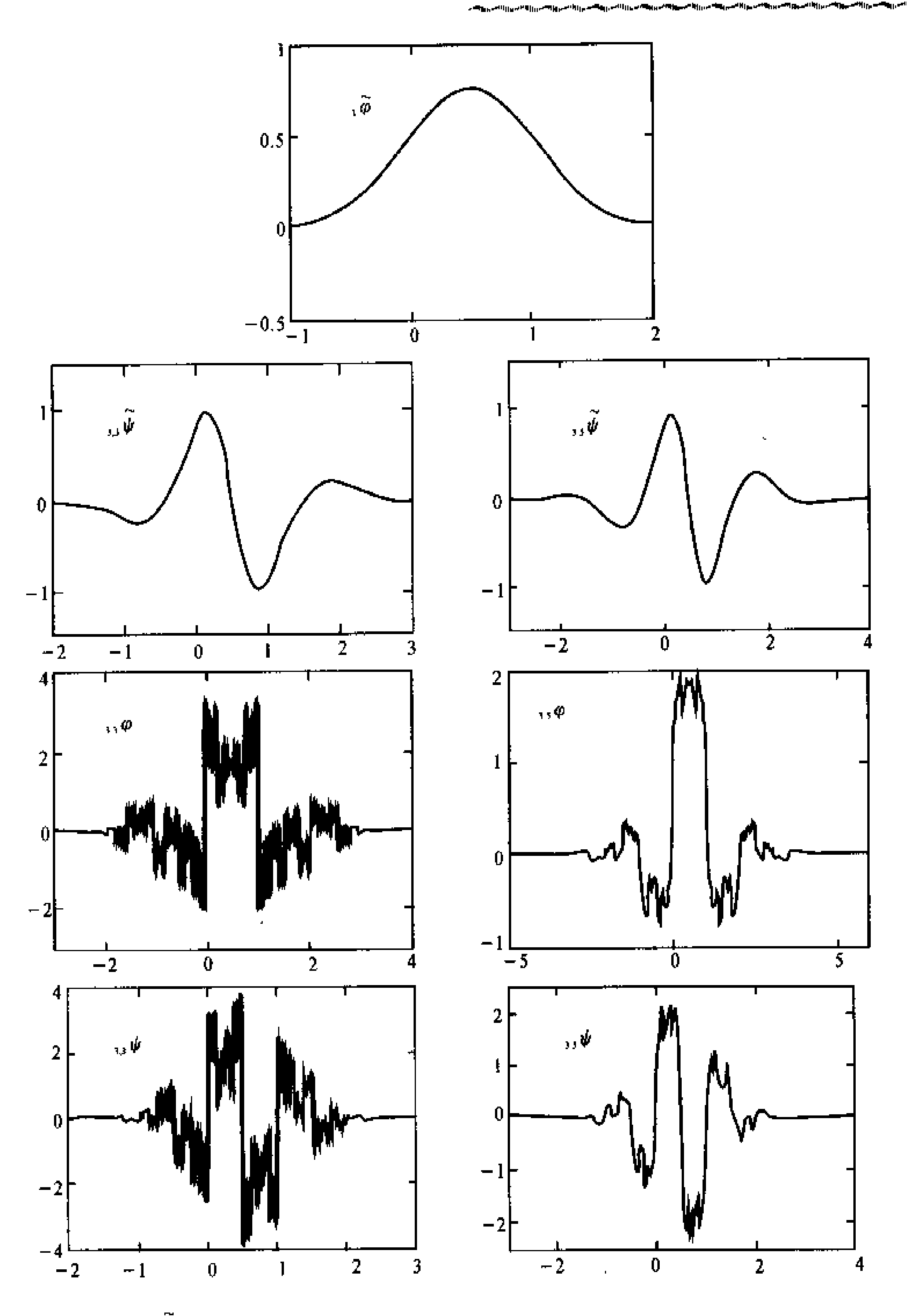


图 5.14　$\tilde{N}=3, N=3,5,7,9$ 的样条例子，对 $N=1$（无图），$_{3,1}\varphi$ 是平方可积的，

$$\mathrm{Supp}_{3,N}\varphi=[-N,N+1], \mathrm{Supp}_{3,N}\psi=\mathrm{Supp}_{3,N}\tilde{\psi}=\left[-\frac{N+1}{2},\frac{N+3}{2}\right]$$

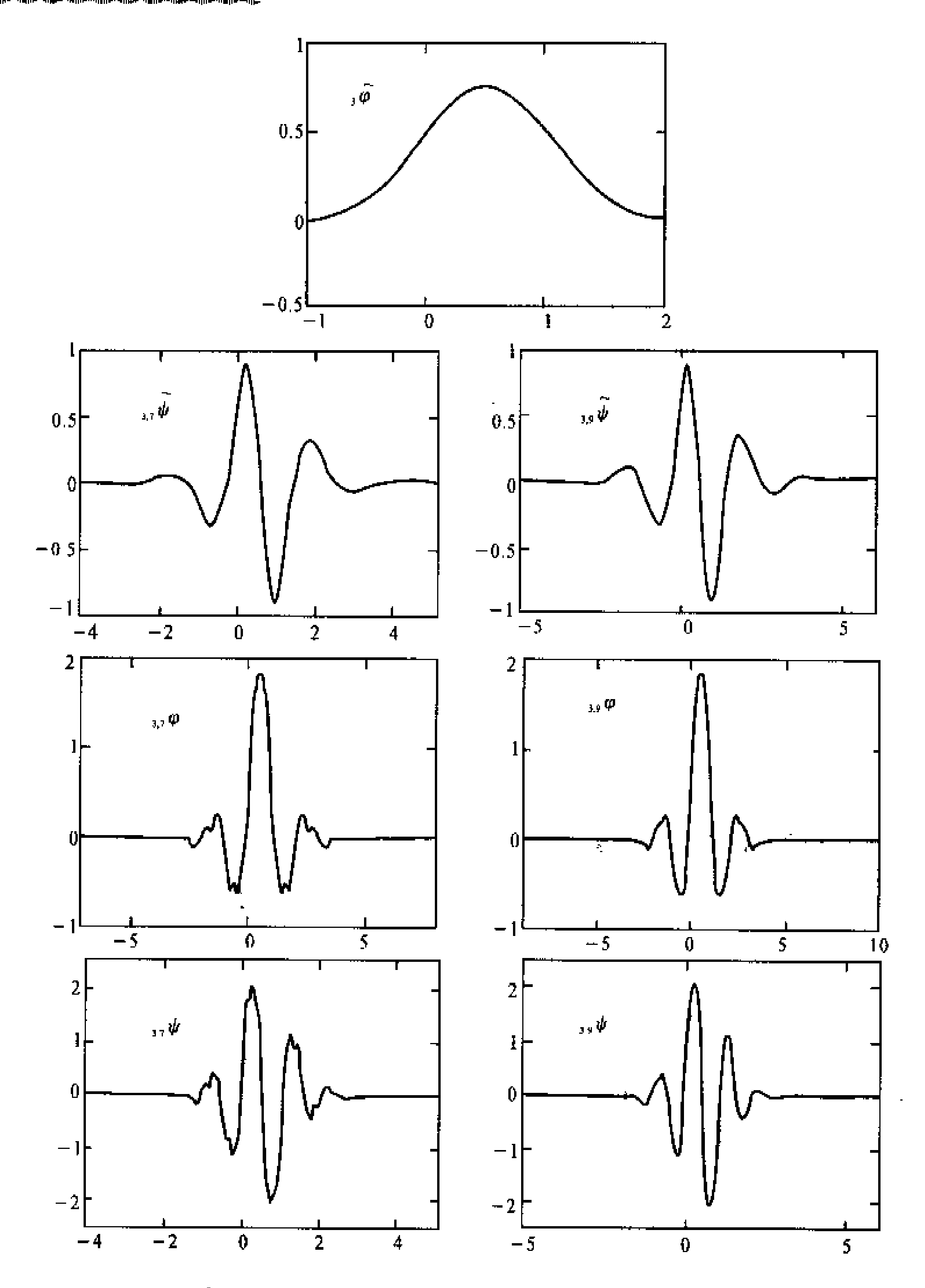


图 5.14(续) $\tilde{N}=3, N=5,7,9$ 的样条例子，对 $N=1$(无图)，$_{3,1}\varphi$ 是平方可积的，

$$\mathrm{Supp}_{3,N}\varphi=[-N,N+1],\mathrm{Supp}_{3,N}\psi=\mathrm{Supp}_{3,N}\tilde{\psi}=\left[-\frac{N+1}{2},\frac{N+3}{2}\right]$$

表 5.1　$\tilde{N}$, N 是最初的几个值对应的滤波器($z = e^{-i\omega}$, $\sum h_n = 1$)

$\tilde{N}$	${}_{\tilde{N}}\tilde{H}(z)$	N	${}_N H(z)$
1	$\frac{1}{2}(1+z)$	1	$\frac{1}{2}(1+z)$
		3	$-\frac{z^{-2}}{16}+\frac{z^{-1}}{16}+\frac{1}{2}+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{16}-\frac{z^3}{16}$
		5	$\frac{3}{256}z^{-4}-\frac{3}{256}z^{-3}-\frac{11}{128}z^{-2}+\frac{11}{128}z^{-1}+\frac{1}{2}+\frac{z}{2}+\frac{11}{128}z^2-\frac{11}{128}z^3-\frac{3}{256}z^4+\frac{3}{256}z^5$
2	$\frac{1}{4}(z^{-1}+2+z)$	2	$-\frac{1}{8}z^{-2}+\frac{1}{4}z^{-1}+\frac{3}{4}+\frac{1}{4}z-\frac{1}{8}z^2$
		4	$\frac{3}{128}z^{-4}-\frac{3}{64}z^{-3}-\frac{1}{8}z^{-2}+\frac{19}{64}z^{-1}+\frac{45}{64}+\frac{19}{64}z-\frac{1}{8}z^2-\frac{3}{64}z^3+\frac{3}{128}z^4$
		6	$-\frac{5}{1024}z^{-6}+\frac{5}{512}z^{-5}+\frac{17}{512}z^{-4}-\frac{39}{512}z^{-3}-\frac{123}{1024}z^{-2}+\frac{81}{256}z^{-1}+\frac{175}{256}+\frac{81}{256}z-\frac{123}{1024}z^2+\cdots$
		8	$2^{-15}(35z^{-8}-70z^{-7}-300z^{-6}+670z^{-5}+1228z^{-4}-3126z^{-3}-3796z^{-2}+10718z^{-1}+22050+10718z-3796z^2\cdots)$
3	$\frac{1}{8}(z^{-1}+3+3z+z^2)$	1	$-\frac{1}{4}z^{-1}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}z-\frac{1}{4}z^2$
		3	$\frac{3}{64}z^{-3}-\frac{9}{64}z^{-2}-\frac{7}{64}z^{-1}+\frac{45}{64}+\frac{45}{64}z-\frac{7}{64}z^2-\frac{9}{64}z^3+\frac{3}{64}z^4$
		5	$-\frac{5}{512}z^{-5}+\frac{15}{512}z^{-4}+\frac{19}{512}z^{-3}-\frac{97}{512}z^{-2}-\frac{13}{256}z^{-1}+\frac{175}{256}+\frac{175}{256}z-\frac{13}{256}z\cdots$
		7	$2^{-14}(-35z^{-7}-105z^{-6}-195z^{-5}+865z^{-4}+336z^{-3}-3489z^{-2}+307z^{-1}+11025+11025z\cdots)$
		9	$2^{-17}(-63z^{-9}+189z^{-8}+469z^{-7}-1911z^{-6}-1308z^{-5}+9188z^{-4}+1140z^{-3}-29676z^{-2}+190z^{-1}+87318+87318z\cdots)$

5.3 二维小波

在实际应用中，二维信号(例如图像)可用二元函数 $f(x,y)$ 来表示，因此需要二维小波。本节简要地把一维小波推广到二维小波。

5.3.1 二维小波变换

定义 5.5 设 $f(x,y)\in L^2(\mathbf{R}^2)$，二维小波函数 $\psi(x,y)$ 满足容许性条件

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0 \tag{5.25}$$

则积分

$$(Wf)(a,b_1,b_2)=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\bar{\psi}\left(\frac{x-b_1}{a},\frac{y-b_2}{a}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad (a\neq 0) \tag{5.26}$$

称为 $f(x,y)$ 的二维连续小波变换。

将式(5.26)中的参数离散化，取 $a=2^j,b_1=2^jk,b_2=2^jn$，则可得到二维离散型小波变换

$$(Wf)(j,k,n)=2^{-j}\iint_{\mathbf{R}^2}f(x,y)\bar{\psi}(2^{-j}x-k,2^{-j}y-n)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{5.27}$$

5.3.2 二维小波分解

把一维小波推广到二维小波，最简单的情形是把二维小波写成两个一维小波的乘积：$\psi(x,y)=\psi^1(x)\psi^2(y)$，即张量积的形式，或变量可分离形式。

设 F 和 G 是两个线性空间，基底分别为$\{f_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ 和$\{g_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$，令空间 H 为

$$H=\{f_j\,g_k\mid j,k\in\mathbf{Z}\} \tag{5.28}$$

则 H 称为空间 F 与 G 的张量积空间，表示为

$$H=F\otimes G \tag{5.29}$$

下面仍由多分辨分析 MRA 出发，导出二维小波函数和小波空间。仅讨论最简单的情形，即将二维尺度函数 $\varphi(x,y)$ 写成两个相同的一维尺度函数的乘积：$\varphi(x,y)=\varphi(x)\varphi(y)$。

设$\{\mathbf{V}_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ 是由 $\varphi(x)$ 生成的 $L^2(\mathbf{R})$ 上的 MRA，则 $\mathbf{V}_j$ 与 $\mathbf{V}_j$ 的张量积为

$$V_j^2=\mathbf{V}_j\otimes\mathbf{V}_j,\qquad j\in\mathbf{Z} \tag{5.30}$$

构成 $L^2(\mathbf{R}^2)$ 上的一个多分辨分析 MRA，常记成$\{V_j^2\}_{j\in\mathbf{Z}}$。此时得到如下的闭子空间嵌套序列：

$$\{0\}\subset\cdots\subset V_1^2\subset V_0^2\subset V_{-1}^2\subset\cdots\subset L^2(\mathbf{R}^2) \tag{5.31}$$

$$\bigcap_{j\in\mathbf{Z}}V_j^2=\{0\},\quad \bigcup_{j\in\mathbf{Z}}V_j^2=L^2(\mathbf{R}^2) \tag{5.32}$$

由于$\{\varphi_{j,k}(x)\}_{k\in\mathbf{Z}}$是$V_j$的规范正交基，可知

$$\{\varphi_{j,k,m}(x,y)=\varphi_{j,k}(x)\varphi_{j,m}(y)\}_{k,m\in Z} \tag{5.33}$$

是V_j^2的规范正交基。于是，对任意的$f(x,y)\in L^2(\mathbf{R}^2)$，就可以由尺度基$\varphi_{j,k,n}(x,y)$在指定尺度$2^j$上做近似展开。

设W_j是V_j在V_{j-1}中的正交补，则有

$$\begin{aligned}V_{j-1}^2=\mathbf{V}_{j-1}\otimes\mathbf{V}_{j-1}&=(\mathbf{V}_j\oplus\mathbf{W}_j)\otimes(\mathbf{V}_j\oplus\mathbf{W}_j)=\\&(\mathbf{V}_j\otimes\mathbf{V}_j)\oplus(\mathbf{V}_j\otimes\mathbf{W}_j)\oplus(\mathbf{W}_j\otimes\mathbf{V}_j)\oplus(\mathbf{W}_j\otimes\mathbf{W}_j)=\mathbf{V}_j^2\oplus\mathbf{W}_j^2\end{aligned} \tag{5.34}$$

式中

$$W_j^2=(\mathbf{V}_j\otimes\mathbf{W}_j)\oplus(\mathbf{W}_j\otimes\mathbf{V}_j)\oplus(\mathbf{W}_j\otimes\mathbf{W}_j) \tag{5.35}$$

式(5.35)说明，二维小波空间W_j^2由三个空间的正交和构成，其基由三个小波基构成：

$$\left.\begin{aligned}\psi^1(x,y)&=\varphi(x)\psi(y)\\\psi^2(x,y)&=\psi(x)\varphi(y)\\\psi^3(x,y)&=\psi(x)\psi(y)\end{aligned}\right\} \tag{5.36}$$

由式(5.30)和式(5.34)可知，φ是V_0中的尺度函数，ψ是W_0中的小波函数，所以

$\{\psi_{j,k,m}^1(x,y)=\varphi_{j,k}(x)\psi_{j,m}(y)\}_{k,m\in\mathbf{Z}}$是空间$\mathbf{V}_j\otimes\mathbf{W}_j$的规范正交基；

$\{\psi_{j,k,m}^2(x,y)=\psi_{j,k}(x)\varphi_{j,m}(y)\}_{k,m\in\mathbf{Z}}$是空间$\mathbf{W}_j\otimes\mathbf{V}_j$的规范正交基；

$\{\psi_{j,k,m}^3(x,y)=\psi_{j,k}(x)\psi_{j,m}(y)\}_{k,m\in\mathbf{Z}}$是空间$\mathbf{W}_j\otimes\mathbf{W}_j$的规范正交基。

由式(5.34)，有

$$L^2(\mathbf{R}^2)=\cdots\oplus W_{-1}^2\oplus W_0^2\oplus W_1^2\oplus\cdots \tag{5.37}$$

所以，$\{\psi_{j,k,m}^s(x,y)\mid s=1,2,3;j,k,m\in\mathbf{Z}\}$构成了$L^2(\mathbf{R}^2)$空间的标准正交基。于是，对于$\forall f(x,y)\in L^2(\mathbf{R}^2)$，都有唯一的分解式

$$f(x,y)=\cdots+g_{-1}(x,y)+g_0(x,y)+g_1(x,y)+\cdots \tag{5.38}$$

式中，$g_j(x,y)\in W_j^2$，因而，又有

$$\begin{aligned}f(x,y)=&\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\sum_{k,m\in\mathbf{Z}}[d_{j,k,m}^1\psi_{j,k,m}^1(x,y)+d_{j,k,m}^2\psi_{j,k,m}^2(x,y)+d_{j,k,m}^3\psi_{j,k,m}^3(x,y)]=\\&\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\sum_{k,m}[d_{j,k,m}^1\varphi_{j,k}(x)\psi_{j,m}(y)+d_{j,k,m}^2\psi_{j,k}(x)\varphi_{j,m}(y)+d_{j,k,m}^3\psi_{j,k}(x)\psi_{j,m}(y)]\end{aligned} \tag{5.39}$$

由正交性可知

$$d_{j,k,m}^1=\iint_{\mathbf{R}^2}f(x,y)\overline{\varphi}_{j,k}(x)\overline{\psi}_{j,m}(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{5.40}$$

$$d_{j,k,m}^2=\iint_{\mathbf{R}^2}f(x,y)\overline{\psi}_{j,k}(x)\overline{\varphi}_{j,m}(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{5.41}$$

$$d_{j,k,m}^3 = \iint_{\mathbf{R}^2} f(x,y)\overline{\psi}_{j,k}(x)\overline{\psi}_{j,m}(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{5.42}$$

由式(5.27) 可知，$d_{j,k,m}^s(s = 1,2,3)$ 是 $f(x,y)$ 的离散小波变换。

同一维情形一样，对 $\forall f(x,y) \in L^2(\mathbf{R}^2)$，二维信号 $f(x,y)$ 的分辨率是有限的，故可设 $f(x,y) \in V_0^2$，于是由空间分解式(5.34)，有

$$\begin{aligned} f(x,y) = f_0(x,y) = f_1(x,y) + g_1(x,y) = \\ f_2(x,y) + g_2(x,y) + g_1(x,y) = \cdots = \\ f_J(x,y) + g_J(x,y) + \cdots + g_1(x,y) \end{aligned} \tag{5.43}$$

式中，$f_J \in V_J^2, g_j \in W_j^2 \quad (j = 1,\cdots,J)$，从而有

$$\begin{aligned} f(x,y) = \sum_{k\in\mathbf{Z}}\sum_{m\in\mathbf{Z}} C_{J,k,m}\varphi_{J,k}(x)\varphi_{J,m}(y) + \sum_{j=1}^{J}\sum_{k,m}[d_{j,k,m}^1\varphi_{j,k}(x)\psi_{j,m}(y) + \\ d_{j,k,m}^2\psi_{j,k}(x)\varphi_{j,m}(y) + d_{j,k,m}^3\psi_{j,k}(x)\psi_{j,m}(y)] \end{aligned} \tag{5.44}$$

式中

$$c_{J,k,m} = \iint_{\mathbf{R}^2} f(x,y)\overline{\varphi}_{J,k}(x)\overline{\varphi}_{J,m}(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{5.45}$$

称为尺度系数。$d_{j,k,m}^s(s = 1,2,3)$ 由式(5.40) ～ 式(5.42) 给出，称为小波系数。

式(5.44) 的第一项是 $f_J(x,y)$ 的表示式，它是 $f(x,y)$ 在 V_J^2 上的投影，也即是 $f(x,y)$ 在尺度 J 下的连续逼近。当 J 取 1,2,… 不同值时可得到不同尺度下的逼近。式(5.45) 是 $f(x,y)$ 在尺度 J 下的离散逼近。式(5.44) 的第二项是 $g_j \in W_j^2(j = 1,2,\cdots,J)$ 的表达式之和，表示 $f(x,y)$ 的不同细节成分的叠加。其中，$d_{j,k,m}^s(s = 1,2,3)$ 称为 $f(x,y)$ 在不同尺度 j 下的离散细节。

5.3.3 Mallat 算法

同一维信号的推导一样，在前面建立的 $L^2(\mathbf{R}^2)$ 的多分辨分析(张量积形式且正交的)基础上可以得到二维正交小波变换的快速算法 ——Mallat 算法，它是通过一对滤波器来构成的。

分解算法

$$\left.\begin{aligned} c_{j+1,k,m} &= \sum_{l\in\mathbf{Z}}\sum_{n\in\mathbf{Z}} c_{j,l,n}h_{l-2k}h_{n-2m} \\ d_{j+1,k,m}^1 &= \sum_{l\in\mathbf{Z}}\sum_{n\in\mathbf{Z}} c_{j,l,n}h_{l-2k}g_{n-2m} \\ d_{j+1,k,m}^2 &= \sum_{l}\sum_{n} c_{j,l,n}g_{l-2k}h_{n-2m} \\ d_{j+1,k,m}^3 &= \sum_{l}\sum_{n} c_{j,l,n}g_{l-2k}g_{n-2m} \end{aligned}\right\} \tag{5.46}$$

式中的 $\{h_k, g_k\}$ 是一维尺度函数和小波 $\{\varphi,\psi\}$ 对应的滤波器，并且 $\sum h_k = \sqrt{2}$。

重构公式

$$c_{j,k,m} = \sum_l \sum_n c_{j+1,l,n} h_{k-2l} h_{m-2n} + \sum_l \sum_n d^1_{j+1,l,n} h_{k-2l} g_{m-2n} + \sum_l \sum_n d^2_{j+1,l,n} g_{k-2l} h_{m-2n} + \sum_l \sum_n d^3_{j+1,l,n} g_{k-2l} g_{m-2n} \tag{5.47}$$

从上面的讨论中可以看出，二维小波有三个小波基，尺度函数仍只有一个，因此二维信号(图像)经小波分解后应得到四个子图。关于这些子图的性质将在第 6 章中介绍。

5.4　小波包简介*

在第3章中已经知道，实际中给定一个信号后，它的最高频率是可以确定的。所以总假设 V_0 是具有最高频率的信号空间。当对信号进行正交小波分解时，第一次分解得到

$$f(t) = f_0(t) = f_1(t) + g_1(t)$$

式中，$f_0(t) \in V_0$，$f_1 \in V_1$，$g_1 \in W_1$，第二次分解得到

$$f(t) = f_2(t) + g_2(t) + g_1(t)$$

即只对 $f_1(t)$ 进行了分解，而保留 $g_1(t)$ 不动。以后再继续分解，仍是对低频部分 $f_2(t)$ 进行分解，高频部分 $g_2(t)$，$g_1(t)$ 保留不动：

$$f(t) = f_0(t) = f_1(t) + g_1(t) = f_2(t) + g_2(t) + g_1(t) = \cdots = f_J(t) + g_J(t) + g_{J-1}(t) + \cdots + g_1(t) \tag{5.48}$$

式中　$f_J \in V_J$，$g_i \in W_i$，　$i = 1,2,\cdots,J \ (J > 1)$

从 $f(t)$ 的频域上来看，式(5.48) 把频域[0,1] 上的信号分解成不同频域(带) 上的信号：f_J 的频带为$[0,2^{-J}]$，g_i 的频带为$[2^{-i},2^{-i+1}]$，$i = J, J-1,\cdots,2,1$。即对于某个 i 空间 W_i 的频带是不变的，W_i 的正交基 $\{\psi_{i,k}(t)\}_{k\in \mathbf{Z}}$ 的频窗也是固定的。对于一般的信号，随着尺度 $2^i(i = 1,2,\cdots,J)$ 的变化，$\{\psi_{i,k}\}$ 的时频窗在变化，可以满足对 $f(t)$ 的时频特性的分析。但是对于某些特殊信号，需要在指定的频率处有大时窗或指定时间处有大频窗，显然用上面小波基对这些信号进行时频分析不再是经济有效的了。

为了满足一些特殊信号的时频分析的需求，即高频部分要有较小的频窗，可以改变一下前面所述的正交小波的多分辨分析的分解形式，即每次分解不只是分解 V_j，对 W_j 也进行分解，把 W_j 分解成几个具有不同频域的子空间。这样，可以针对被分析信号的特征，自适应地选择相应频带，使之与信号的频谱相匹配，从而提高分辨率。

5.4.1　正交小波包的概念

设$(\{V_j\},\varphi(t))$是 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个 MRA，则 $\varphi(t)$ 及相应的正交小波 $\psi(t)$ 满足双尺度方程

$$\begin{cases}\varphi(t)=\sqrt{2}\sum_k h_k\varphi(2t-k) & (5.49)\\ \psi(t)=\sqrt{2}\sum_k g_k\varphi(2t-k) & (5.50)\end{cases}$$

记 $u_0(t)=\varphi(t), u_1(t)=\psi(t)$，则式(5.49)和式(5.50)分别写成

$$\begin{cases}u_0(t)=\sqrt{2}\sum_k h_k u_0(2t-k) & (5.51)\\ u_1(t)=\sqrt{2}\sum_k g_k u_0(2t-k) & (5.52)\end{cases}$$

定义 5.6 由公式

$$\begin{cases}u_{2l}(t)=\sqrt{2}\sum_k h_k u_l(2t-k) & (5.53)\\ u_{2l+1}(t)=\sqrt{2}\sum_k g_k u_l(2t-k) & (5.54)\end{cases}$$

定义的函数集合 $\{u_n(t)\mid n=2l \text{或} 2l+1, l=0,1,\cdots\}$ 称为关于正交尺度函数 $u_0(t)=\varphi(t)$ 的小波包。

由于 $\varphi(t)$ 由滤波器 $\{h_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 唯一确定，所以又称 $\{u_n(t)\}$ 为关于 $\{h_k\}$ 的正交小波包。

5.4.2 $L^2(\mathbf{R})$ 的小波包分解

在关于 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个正交多分辨分析的讨论中已经知道，$\varphi(t)$ 是 V_0 的正交基，$\psi(t)$ 是 W_0 的正交基，此时也常说 V_0 由 $\varphi(t)$ 的平移系张成，即

$$V_0=\mathrm{span}\{\varphi(t-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$$

或

$$V_0=\mathrm{clos}_{L^2(\mathbf{R})}\{\varphi(t-k), k\in\mathbf{Z}\}$$

W_0 由 $\psi(t)$ 的平移系张成，即

$$W_0=\mathrm{span}\{\psi(t-k), k\in\mathbf{Z}\}$$

现在，引入前面的记号后，可以将上面的表示写成

$$V_0=\mathrm{span}\{u_0(t-k), k\in\mathbf{Z}\}$$

$$W_0=\mathrm{span}\{u_1(t-k), k\in\mathbf{Z}\}$$

再引入记号

$$U_j^0=V_j \tag{5.55}$$

$$U_j^1=W_j \tag{5.56}$$

显然

$$U_0^0=V_0, U_0^1=W_0$$

$$U_{-1}^0=U_0^0\oplus U_0^1=V_0\oplus W_0=V_{-1} \tag{5.57}$$

从面可知

$$\langle u_0(t-k), u_1(t-m)\rangle = 0, \quad k,m \in \mathbf{Z} \tag{5.58}$$

且

$$\{u_0(t-k), u_1(t-m)\}_{k,m\in\mathbf{Z}} \tag{5.59}$$

构成 U_{-1}^0 的标准正交基。

为了把空间分解式(5.57) 进行推广，设 $U_{-1}^0 = \mathrm{span}\{2^{1/2}u_0(2t-k), k \in \mathbf{Z}\}$，则容易证明 U_{-1}^0 的标准正交基与 U_0^0 和 U_0^1 的标准正交基：$\{u_0(t-k)\}$ 和 $\{u_1(t-k)\}$ 有如下关系：

$$2^{1/2}u_0(2t-k) = \sum_l [\bar{h}_{k-2l}u_0(t-l) + \bar{g}_{k-2l}u_1(t-l)] \tag{5.60}$$

事实上，由于式(5.59) 也是 U_{-1}^0 的标准正交基，所以有

$$\sqrt{2}u_0(2t-k) = \sum_l [\alpha_l u_0(t-l) + \beta_l u_1(t-l)]$$

利用式(5.51)、式(5.52) 及式(5.58)，有

$$\alpha_l = \int_{\mathbf{R}} \sqrt{2}u_0(2t-k)\bar{u}_0(t-l)\mathrm{d}t = \sqrt{2}\int_{\mathbf{R}} u_0(2t-k)\sum_n \sqrt{2}\,\bar{h}_n\bar{u}_0(2t-2l-n)\mathrm{d}t =$$

$$2\sum_n \bar{h}_n \int_{\mathbf{R}} u_0(2t-k)\bar{u}_0(2t-2l-n)\mathrm{d}t = \bar{h}_{k-2l}$$

同理，有

$$\beta_l = \bar{g}_{k-2l}$$

设 $\{u_n(t)\}_{n=0,1,2,\cdots}$ 是关于 $\{h_k\}$ 的小波包，式(5.60) 可以推广(事实上可以证明) 为

$$\sqrt{2}u_n(2^{-j}t-k) = \sum_l \bar{h}_{k-2l}u_{2n}(2^{-j-1}t-l) + \sum_l \bar{g}_{k-2l}u_{2n+1}(2^{-j-1}t-l) \tag{5.61}$$

如果记

$$U_j^n = \mathrm{span}\{2^{-j/2}u_n(2^{-j}t-k), k \in \mathbf{Z}\} \tag{5.62}$$

则式(5.61) 说明 U_j^n 的基能用 U_{j+1}^{2n} 与 U_{j+1}^{2n+1} 的基线性表出。这样，可以把式(5.57) 推广成

$$U_j^n = U_{j+1}^{2n} \oplus U_{j+1}^{2n+1}, \qquad j \in \mathbf{Z} \tag{5.63}$$

由于 $U_j^0 = V_j, U_j^1 = W_j$，利用式(5.63)，可得如图 5.15 所示的 V_0 的树结构分解关系。

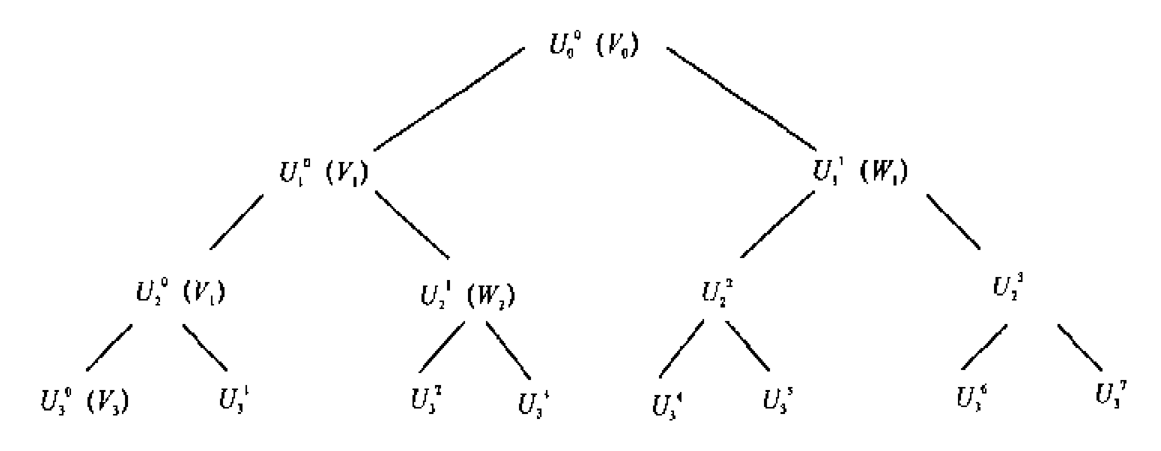


图 5.15　小波包树结构分解图

图 5.15 中显示了每个节点上子空间被一分为二变为两个子空间，所以图 5.15 也称为 V_0 的裂变分解图。在图 5.15 所示的关系中，每一层的各子空间是相互正交的。V_0 的基可由任一层，例如第 j 层($j = 0,1,2,\cdots,J$) 各子空间的基合起来组成：

$$\{2^{-j/2}u_n(2^{-j}t-k), k \in \mathbf{Z}, n = 0,1,\cdots,2^j-1\} \tag{5.64}$$

而且根据需要，某个 U_j^n 的基又可由 U_{j+1}^{2n} 与 U_{j+1}^{2n+1} 的基替代。这样，对于 V_0 的基(式(5.64))，可以在 V_0 的频域$[0,1]$内任何一个子带上再精细分划。V_0 的分解关系及相联系的频带分划可用图 5.16 表示。

图 5.16　V_0 的解结构分解及各层子空间所占的频带

对于有些信号 $f(t) \in V_0$，只需要在某个频率附近局部化，其他频率范围不需局部化。此时，如果选用式(5.64) 所表示的基，则 $f(t)$ 分解式中的系数比选一个“更合适”基的分解系数要多许多，实在不划算，这是一种“浪费”。如果按图 5.16 中的阴影部分的子空间来选择基(根据指定的需要局部化的频率点，如该点在$\left[\frac{10}{2^4},\frac{11}{2^4}\right]$中)，即

$$\{2^{-1/2}u_1(2^{-1}t-k), 2^{-3/2}u_m(2^{-3}t-k), 2^{-2}u_n(2^{-4}t-k),$$
$$k \in \mathbf{Z}, m = 4,6,7, n = 10,11\} \tag{5.65}$$

这样，用基(5.65) 来分解信号 $f(t)$，其系数比用基(5.64) 取 $j = 4$ 来分解信号要少得多，因为在不需要局部化的频域内，信号可用“粗糙”基表示。

尺度空间 V_0 或 $L^2(\mathbf{R})$ 的基有很多种选择，例如，分割时间轴在频率轴上是一致平移的局部余弦基。这里，只讨论在小波库(集)

$$\{2^{-j/2}u_n(2^{-j}t-k), k \in \mathbf{Z}, j \in \mathbf{Z}, n = 0,1,\cdots\} \tag{5.66}$$

中选取小波包基的问题。小波包基的选取，取决于 V_0 或 $L^2(\mathbf{R})$ 的分解方式或者说它是频域的某种分割。

定义 5.7　在式(5.66) 表示的小波库中，抽取能组成空间 V_0 或 $L^2(\mathbf{R})$ 的一组标准正交基称为 V_0 或 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个小波包基。

关于 V_0 或 $L^2(\mathbf{R})$ 的分解，只要熟悉多分辨分析及式(5.55)、式(5.56) 和式(5.63)，就

不难写出它们的分解形式。为了应用方便，下面给出 W_j 和 V_j 的分解式：

$$W_j = U_j^1 = U_{j+1}^2 \oplus U_{j+1}^3 = U_{j+2}^4 \oplus U_{j+2}^5 \oplus U_{j+2}^6 \oplus U_{j+2}^7 = \cdots = U_{j+k}^{2^k} \oplus U_{j+k}^{2^k+1} \oplus \cdots \oplus U_{j+k}^{2^{k+1}-1} \tag{5.67}$$

$$V_j = U_j^0 = U_{j+1}^0 \oplus U_{j+1}^1 = U_{j+2}^0 \oplus U_{j+2}^1 \oplus U_{j+2}^2 \oplus U_{j+2}^3 = \cdots = U_{j+k}^0 \oplus U_{j+k}^1 \oplus \cdots \oplus U_{j+k}^{2^k-1} \tag{5.68}$$

其中子空间 U_j^n 的标准正交基(见式(5.62))为

$$\{2^{-j/2}u_n(2^{-j}t-m), m \in \mathbf{Z}\} \tag{5.69}$$

在讨论多分辨分析时已经知道，$L^2(\mathbf{R}) = \lim\limits_{j \to -\infty} V_j$，因此由式(5.68)，对于固定的 j，有

$$L^2(\mathbf{R}) = U_j^0 \oplus U_j^1 \oplus \cdots \oplus U_j^n \oplus \cdots$$

此时 $L^2(\mathbf{R})$ 与上面分解式相应的小波包基是

$$\{2^{-j/2}u_n(2^{-j}t-k), k \in \mathbf{Z}, n = 0,1,2,\cdots\} \tag{5.70}$$

式(5.70)表示的基也称为 $L^2(\mathbf{R})$ 的子带基(各子带的宽度为 2^{-j})。

当写 $L^2(\mathbf{R}) = \bigoplus\limits_{j=-\infty}^{+\infty} W_j$，此时 $L^2(\mathbf{R})$ 的小波基是

$$\{2^{-j/2}u_n(2^{-j}t-k), k \in \mathbf{Z}, j \in \mathbf{Z}, n = 1\} \tag{5.71}$$

即在小波库中选取 $n = 1$ 时的小波包基。由此可见，$L^2(\mathbf{R})$ 的小波基是小波包基的特例，小波包基是小波基的推广形式。

5.4.3　最优基的选取

在实际应用中，只考虑 V_0 的小波包基的选取问题。由前一段的讨论知道，$V_0 = U_0^0$，而 U_0^0 又可以写成许多不同子空间 U_j^n 的正交和。例如，与式(5.65)对应的分解

$$V_0 = U_0^0 = U_1^0 \oplus U_3^4 \oplus U_3^6 \oplus U_3^7 \oplus U_4^{10} \oplus U_4^{11}$$

是不是任意选取若干个 $U_j^n(j, n \in \mathbf{N})$ 都能构成 V_0 的正交分解，从图 5.16 可以看出并非如此，因为许多子空间之间有包含关系。那么，怎样选取 U_j^n 才能使它们的和正好是 V_0，仍然从图 5.16 来看，U_j^n 对应的频域区间是$[n2^{-j}, (n+1)2^{-j}]$，如果 j, n 的选取使得这些子区间两两不相交且正好是区间$[0,1)$的一个划分，即

$$\bigcup_{(j,n)\in S}[n2^{-j}, (n+1)2^{-j}) = [0,1) \tag{5.72}$$

式中，$S \subset \mathbf{N} \times \mathbf{N}$，$(j,n)$ 对应二叉树的节点。只有这样的一些 U_j^n 才能构成 V_0 的正交分解。至于 V_0 的小波包基，可以用同样的方法，在小波库式(5.66)中选取 j, n，使得式(5.72)成立。

由以上分析可以看出，使得式(5.72)成立的 j, n 的选取可以有很多种，它们都可以作为 V_0 的小波包基。这些小波基中哪一个是所要的“最优”的基呢？

所谓“最优”基，就是对所要表示的信号 $f_0(t)$ 来说，按照某种衡量准则来评价。衡量准则可以是函数 f_0 与基之间的某种距离，也可以是 f_0 在基下能量集中的程度(f_0 在基下的

表示系数只有少数几个不可忽略，其他系数绝对值接近零），这种准则常用花费函数来刻画。

定义 5.8 设实序列 $d=\{d_k\}$ 是 $f(t)$ 在一组基下的系数，若存在非负逐段连续函数 μ，使得

$$M(d)=\sum_k \mu(|d_k|), \qquad \mu(0)=0 \tag{5.73}$$

则称 M 是 d 的花费函数。

花费函数常用的几种形式见文献[8]。

现在，假设花费函数已确定，下面讨论如何在小波库中选取花费最小的小波包基。

由前面讨论可知，求最优小波包基，就是要求出对应 V_0 的一种分解：

$$V_0=\bigoplus_{(j,n)\in S} U_j^n \tag{5.74}$$

使得花费函数在上面分解中的每个 U_j^n 上取值之和达到最小。

设 $f(t)$ 在 U_j^n 基下的系数序列为 $d^{j,n}=\{d_k^{j,n}\}$，一旦花费函数确定，$M(d^{j,n})=\sum_k \mu(|d_k^{j,n}|)$ 容易算出。

由于 V_0 的小波包分解构成了一个完整的树结构（见图 5.15），故可称 V_0 为树根，U_j^n 为树的节点。在算出每个节 U_j^n 上的花费函数值后，把它记在相应的节点上，可得图 5.17。

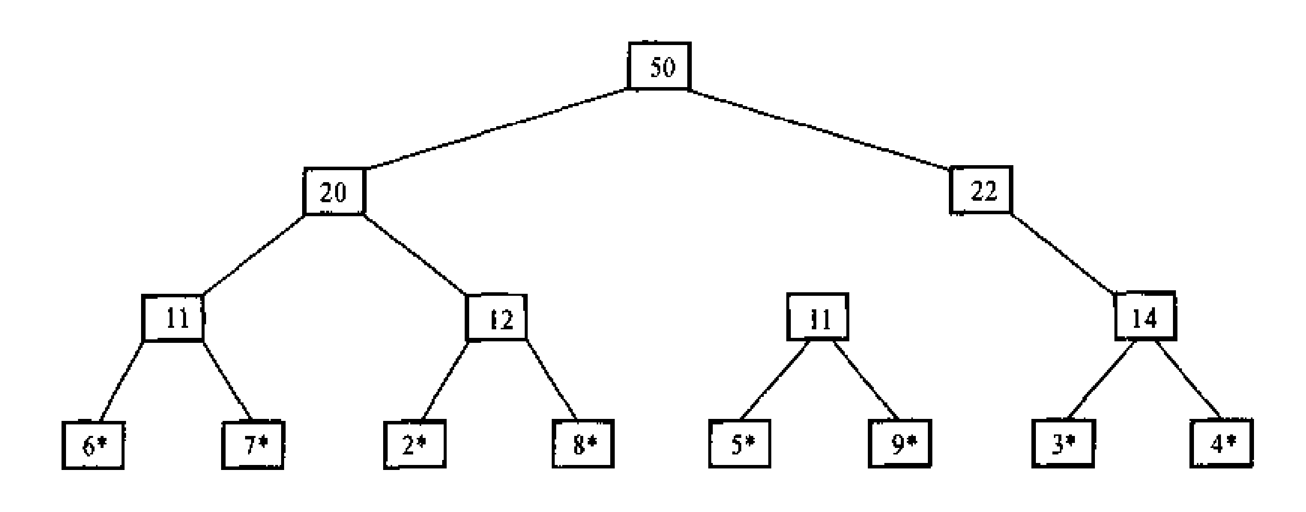


图 5.17 花费函数在 V_0 的小波包二叉树节点上的值

V_0 的最优小波包基的获取步骤如下：

第一步：在树的最低层各节点标上 * 号。

第二步：从底层开始，将同一层每两个节点值之和与上一层节点值比较，若和大于上一层值，则在该节点处标上 * 号，以表示它比下一层两个节点花费函数之和小。若和值小于上一层节点的值，则将和值写在该点处，以替换原有值，如图 5.18 所示。

第三步：从树的顶层开始经每个节点向下层搜索，遇到标有 * 号的节点则停止（该节

点下面的节点不必再搜索)。选取各子树停止处的节点,则这些子空间的直和就构成 V_0 的正交分解,它对应 V_0 的最优基,如图 5.19 所示。

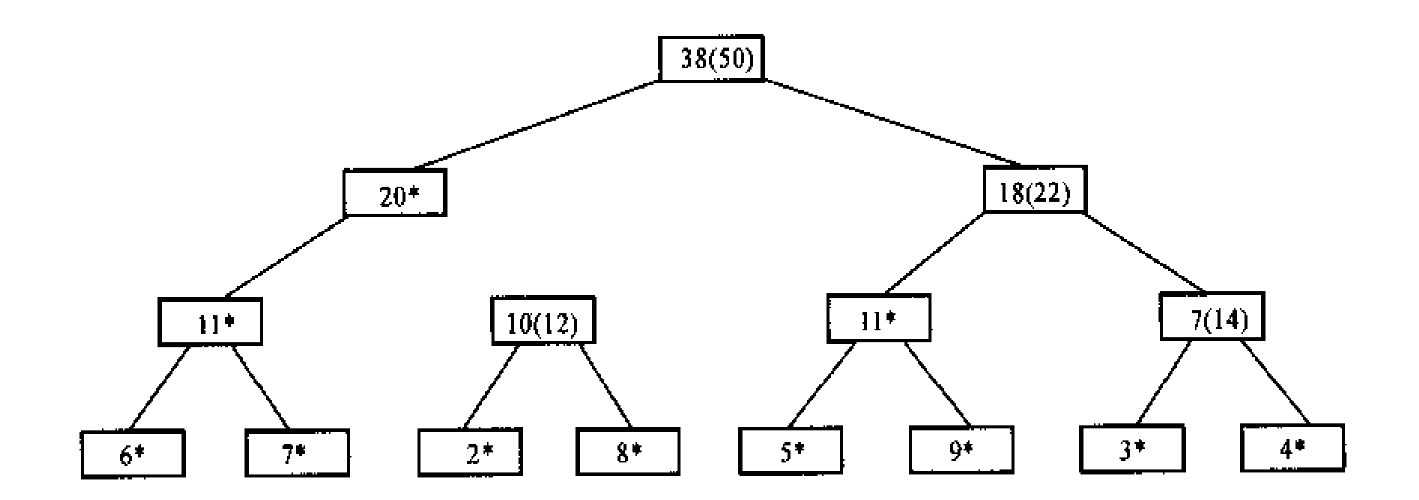


图 5.18 (·)内的值为该节点原来的值

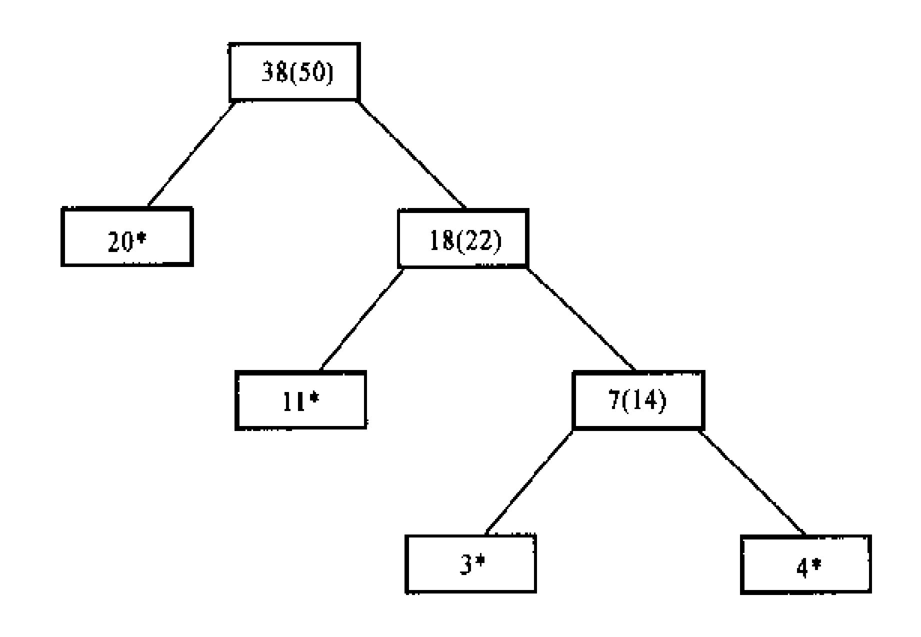


图 5.19　最优小波包基的例

5.4.4　小波包算法

设 $f(t)\in V_0$,由 V_0 的裂变分解关系可知,对于任意指定的 j 层,有

$$V_0=U_j^0\oplus U_j^1\oplus\cdots\oplus U_j^{2^j-1}$$

再由式(5.64),可知

$$f(t)=f_j^0+f_j^1+\cdots+f_j^{2^j-1}$$

其中 $f_j^n\in U_j^n$,又由于 $U_j^n=U_{j+1}^{2n}\oplus U_{j+1}^{2n+1}$,所以

$$f_j^n = f_{j+1}^{2n} + f_{j+1}^{2n+1} \tag{5.75}$$

从式(5.75)出发，利用U_j^n的基和U_{j+1}^{2n}与U_{j+1}^{2n+1}的基线性表出式(5.61)，容易得到小波包快速分解算法，即利用已知的滤波器$\{h_k, g_k\}$，在尺度j下f在某子空间U_j^n中的投影系数(即该子空间基下的系数)$d_{j,k}^n$计算出尺度$j+1$下f在U_{j+1}^{2n}与U_{j+1}^{2n+1}中的投影系数$d_{j+1,k}^{2n}$，$d_{j+1,k}^{2n+1}$。

分解算法公式：

$$\left.\begin{aligned} d_{j+1,k}^{2n} &= \sum_l d_{j,l}^n \ \bar{h}_{l-2k} \\ d_{j+1,k}^{2n+1} &= \sum_l d_{j,l}^n \ \bar{g}_{l-2k} \end{aligned}\right\}, \quad k \in \mathbf{Z} \tag{5.76}$$

在式(5.75)两端，将函数用它所在的子空间的基表示，再利用式(5.53)、式(5.54)，可得重构公式：

$$d_{j,k}^n = \sum_m (d_{j+1,m}^{2n} \ h_{k-2m} + d_{j+1,m}^{2n+1} \ g_{k-2m}), \quad k \in \mathbf{Z} \tag{5.77}$$

系数$d_{j,k}^n$称为小波包系数，它是f在子空间U_j^n的投影系数，所以小波包系数也可以用一个树结构图表示，如图5.20所示。

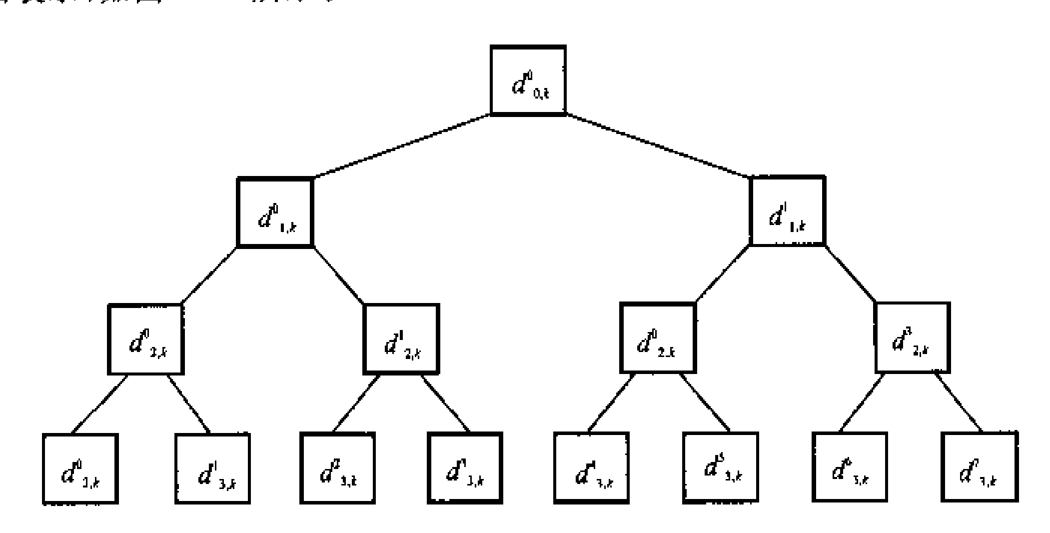


图5.20　小波包系数的树形图

由前一段讨论可知，对于已给的信号$f(t)$，在选定了一组小波包基后，也就相应确定了V_0的一种分解$V_0 = \bigoplus_{(j,n)\in S} U_j^n$($S$为选定的子空间$U_j^n$的指标集)，此时容易写出$f$在该小波基下的分解式

$$f(t) = \sum_{(j,n)\in S} \sum_{k\in \mathbf{Z}} d_{j,k}^n 2^{-j/2} u_n(2^{-j}t - k) \tag{5.78}$$

反之，如果已知$f(t)$在一组小波包基下的系数$d_{j,k}^n$，则由重构公式式(5.77)，逐步计算，最后得到$d_{0,k}^0$，即$f(t)$在V_0中的投影系数，它即是$f(t)$。

关于小波基，从第3章至本节，已经叙述了一些常用的具有某些性质的小波基。随着小

波理论的深入研究和广泛应用，产生了许多小波基。例如，当给定信号仅定义在某个区间 $[a,b]$（或通过伸缩与平移变换成 $[0,1]$ 区间）上时，就需要构造 $L^2[0,1]$ 上的区间小波；为了改变小波的性质（如提高消失矩），而构造了提升小波；由一个小波生成的小波基，不能同时具备正交性、对称性、紧支性、插值性和高阶消失矩等，因而产生由多个母小波生成小波基的多小波；其他的诸如插值小波，高维小波，伸缩因子不是 2 的（如大于 2，或非整数）一维或高维小波；解析小波、向量小波、球面小波、第 2 广义小波；等等。小波理论还不断发展，应用范围也在不断扩展与深入。有兴趣的读者，请参阅有关文献。

小　结

在前几章的基础上，本章总结了小波基的几个重要的数学特征，并对小波基进行了推广。例如，实际中应用较多的样条小波和二维小波。

(1) 小波基的数学特征。小波的正则性、消失矩、正交性、双正交性、紧支性和对称性等都是小波基重要的数学特征。应充分理解这些性质的含义。

一个函数的正则性反映了该函数的光滑性，它可以用一个数来量化，这个数就是 Lipschitz 指数。而小波 $\psi(t)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的一致正则性与 $|\hat{\psi}(\omega)|$ 的衰减性有关。可以证明，如果存在常数 K，使得

$$|\hat{\psi}(\omega)| \leqslant \frac{K}{1+|\omega|^{n+1+\varepsilon}} \tag{1}$$

则 $\psi(t)$ 一定 n 次可微。

消失矩与正则性有关。若已知函数 $f(t)$ 的消失矩，则可以利用 $f(t)$ 的小波变换估计 f 的局部 $L-\alpha$。有些小波的正则性会随消失矩的增加而提高。

要求小波具有较高正则性或其他性质，目的是提高用小波基有效逼近信号的“最优性”。

(2) B-样条小波。Battle-Lemarie 样条小波，是由尺度函数 φ 取 m 阶基数 B-样条函数 $N_m(t)$ 来构造的（见式(5.18)）。由于 $N_m(t)$ 的整数平移不正交，所以 $\varphi(t)$ 也是平移不正交的，需要正交化。

Battle-Lemarie 样条小波没有分析表达式，不具有紧支性。但它具有对称性和指数型衰减性。

(3) 紧支样条小波。令

$$\psi_m(t) = \sum_{j=0}^{3m-2}\left[\frac{(-1)^j}{2^{m-1}}\sum_{l=0}^{m}\begin{bmatrix}m\\l\end{bmatrix}N_{2m}(j+1-l)\right]N_m(2t-j) \tag{2}$$

式(2) 定义的小波 $\psi_m(t)$ 其支集为 $[0,2m-1]$，是对称的（m 为偶数）或反对称的（m 为奇数）。ψ_m 的伸缩与平移可以构成 $L^2(\mathbf{R})$ 的 Riesz 基。$\psi_m(t)$ 的对偶小波也具有同样的性质。

(4) 双正交样条小波。对称的双正交样条小波 ψ 与 $\tilde{\psi}$，在构造时取 $\tilde{\varphi}(t)$ 为中心在零或 $\frac{1}{2}$ 的 B-样条函数。分 $N,\tilde{N}$ 为偶数和奇数两种情形，经过一些理论上的推导，得到直接构造滤波器的公式：

情形 Ⅰ $N=2K,\tilde{N}=2\tilde{K}$

$$\tilde{H}(\omega)=\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2\tilde{K}} \tag{3}$$

$$H(\omega)=\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{N}\sum_{j=0}^{K+\tilde{K}-1}\begin{bmatrix}\tilde{K}+K-1+j\\ j\end{bmatrix}\left(\sin^2\frac{\omega}{2}\right)^{j} \tag{4}$$

情形 Ⅱ $N=2K+1,\tilde{N}=2\tilde{K}+1$

$$\tilde{H}(\omega)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}}\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2\tilde{K}+1} \tag{5}$$

$$H(\omega)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}}\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{N}\sum_{j=0}^{K+\tilde{K}}\begin{bmatrix}K+\tilde{K}+j\\ j\end{bmatrix}\left(\sin^2\frac{\omega}{2}\right)^{j} \tag{6}$$

先取定 $\tilde{K}$，再选取 K，当 $\tilde{K}$ 取定后 $\tilde{\varphi}(t)$ 就可以确定。而 $\tilde{\psi}$、φ、ψ 与 $\tilde{N}$ 及 N 有关，记为 ${}_{\tilde{N}}\tilde{\varphi}$，${}_{\tilde{N},N}\tilde{\psi}$，${}_{\tilde{N},N}\varphi$，${}_{\tilde{N},N}\psi$，它们的图形见图 5.12～图 5.14。${}_{\tilde{N}}\tilde{H}(z)$，${}_{\tilde{N},N}H(z)$ 中 $\tilde{N},N$ 最初的几个值见表 5.1。

(5) 二维小波。图像处理问题要用到二维小波 $\psi(x,y)$。它是 $L^2(\mathbf{R}^2)$ 中满足容许条件式(5.25)的函数。$f(t)$ 的二维小波变换见式(5.26)及式(5.27)。

本章仅讨论简单而又实用的张量积(或可分离形式)二维小波。

将二维尺度函数 $\varphi(x,y)$ 定义为

$$\varphi(x,y)=\varphi(x)\varphi(y)$$

$\varphi(\cdot)$ 是一维尺度函数。$L^2(\mathbf{R}^2)$ 上一个正交的 MRA 记成 $\{V_j^2\}_{j\in\mathbf{Z}}$ 或 $\{V_j^2,\varphi(x,y)\}_{j\in\mathbf{Z}}$，其中 $V_j^2=V_j\otimes V_j$，V_j^2 的规范正交基是：

$$\{\varphi_{j,k,m}(x,y)=\varphi_{j,k}(x)\varphi_{j,m}(y)\}_{k,m\in\mathbf{Z}} \tag{7}$$

子空间 V_{j-1}^2 的分解式是

$$V_{j-1}^2=V_j^2\oplus W_j^2$$

其中小波空间 W_j^2 是三个张量积空间 $V_j\otimes W_j$，$W_j\otimes V_j$，与 $W_j\otimes W_j$ 的正交和，W_j^2 是 V_j^2 在 V_{j-1}^2 中的正交补。设 $\psi_{j,n}(\cdot)$ 是 W_j 的规范正交基，类似式(7)，不难写出空间 $V_j\otimes W_j$，$W_j\otimes V_j$ 和 $W_j\otimes W_j$ 的规范正交基。

应用中的二维信号总是分辨率有限的，所以可设 $f(x,y)\in V_0^2$。由于

$$V_0^2=V_1^2\otimes W_1^2=\cdots V_j^2\oplus W_j^2\oplus W_{j-1}^2\oplus\cdots\oplus W_1^2$$

所以有

$$f(x,y)=f_J(x,y)+g_J(x,y)+\cdots+g_1(x,y) \tag{8}$$

式中，$f_J\in V_J^2$，$g_j\in W_j^2(j=J,J-1,\cdots,1)$。由此，$f_J$，$g_j$ 可写成

$$f_J(x,y)=\sum_{k,m}c_{J,k,m}\varphi_{J,k}(x)\varphi_{J,m}(y) \tag{9}$$

$$g_j(x,y)=\sum_{k,m}[d_{j,k,m}^1\varphi_{j,k}(x)\psi_{j,m}(y)+d_{j,k,m}^2\psi_{j,k}(x)\varphi_{j,m}(y)+d_{j,k,m}^3\psi_{j,k}(x)\psi_{j,m}(y)] \tag{10}$$

由式(8)、式(9)、式(10)，可得 $f(x,y)$ 的分解式(见式(5.44))，系数 $c_{J,k,m}$ 称为尺度系数，$d_{j,k,m}^s(s=1,2,3)$ 称为小波系数。

二维小波变换也有 Mallat 快速算法(见式(5.46)、式(5.47))。

图像经小波分解可得到四个子图。

(6) 正交小波包。记 $u_0(t)=\varphi(t)$，$u_1(t)=\psi(t)$，并设其滤波器组为$\{h_k,g_k\}$。由公式

$$\left.\begin{aligned}u_{2l}(t)&=\sqrt{2}\sum_k h_k u_l(2t-k)\\u_{2l+1}(t)&=\sqrt{2}\sum_k g_k u_l(2t-k)\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

所定义的函数集合$\{u_n(t)\mid n=2l$ 或 $2l+1,l=0,1,\cdots\}$称为关于尺度函数 $\varphi(t)$ 或$\{h_k\}$的正交小波包。

记 $U_j^0=V_j$，$U_j^1=W_j$，则由 $V_{-1}=V_0\oplus W_0$，可得

$$U_{-1}^0=U_0^0\oplus U_0^1 \tag{12}$$

经简单推证可得空间分解式

$$U_j^n=U_{j+1}^{2n}\oplus U_{j+1}^{2n+1},\qquad j\in\mathbf{Z} \tag{13}$$

令 $n=0$，取 $j=0,1,\cdots,J$，重复使用式(13)，得到空间 V_0 的树结构分解图(见图 5.15)。由图 5.15 可以看出，V_0 可用任一层(如第 j 层)上的 $U_j^n(n=0,1,\cdots,2^{j-1})$ 的正交和表示，即

$$V_0=U_j^0\oplus U_j^1\oplus\cdots\oplus U_j^{2^j-1} \tag{14}$$

而 U_j^n 的基是

$$\{2^{-j/2}u_n(2^{-j}t-k)\mid k\in\mathbf{Z},n=0,1,\cdots,2^j-1\} \tag{15}$$

小波包基的主要优点是，在分解式(14)中，某个 U_j^n 可以再分解成 $U_{j+1}^{2n}\oplus U_{j+1}^{2n+1}$，从而在 V_0 的频域[0,1]内任一子带上可选取更精细的子带基，以适应对某些特殊信号的分析。

(7) 小波包算法。设 $f\in V_0$，由 V_0 的分解式(14)，有

$$f(t)=f_j^0+f_j^1+\cdots+f_j^{2^j-1} \tag{16}$$

其中，$f_j^n\in U_j^n$。又由分解式(13)，有

$$f_j^n=f_{j+1}^{2n}+f_{j+1}^{2n+1} \tag{17}$$

利用已知的滤波器$\{h_k,g_k\}$及小波包的定义，U_j^n 与 U_j^{2n} 和 U_{j+1}^{2n+1} 基之间的关系，有下面的分解与重构算法的 Mallat 公式：

$$
\begin{cases} d_{j+1,k}^{2n} = \sum_l d_{j,l}^n \, \overline{h}_{l-2k} \\ d_{j+1,k}^{2n+1} = \sum_l d_{j,l}^n \, \overline{g}_{l-2k} \end{cases} \quad k \in \mathbf{Z} \tag{18}
$$

与

$$
d_{j,k}^n = \sum_m (d_{j+1,m}^{2n} h_{k-2m} + d_{j+1,m}^{2n+1} g_{k-2m}) \tag{19}
$$

其中，$d_{j,l}^n$ 是 f 在 U_j^n 中的投影系数。

实际应用式(18) 时，从 $n=0, j=0$ 开始。显然，$d_{0,l}^0 = c_{0,l}$。

从小波系数的树形(见图 5.20) 不难看出，分解式是从上至下一层一层递推计算的；而重构公式是从下至上一层一层递推计算的。当然每一层中的 d_j^n 的选取还要依赖于预先选取的小波包基。

习　题

1. 设 $\varphi(t)$ 是正交 MRA 的尺度函数，$\psi(t)$ 是相应的小波，且 φ 和 ψ 都具有衰减性：

$|\varphi(t)| \leqslant C_1(1+|t|)^{-p-\varepsilon}$，

$|\psi(t)| \leqslant C_2(1+|t|)^{-p-\varepsilon}$，($C_1, C_2$ 为正的常数，$\varepsilon > 0$)

证明，如果 $\psi(t)$ 具有 p 阶消失矩，则

(1) $\hat{\psi}(\omega)$ 和它的前 $p-1$ 阶导数在 $\omega = 0$ 处为零；

(2) $\hat{h}(\omega)$ 和它的前 $p-1$ 阶导数在 $\omega = \pi$ 处为零。

2. 设 $\psi(t)$ 具有衰减性 $|\psi(t)| \leqslant K(1+|t|)^{-2-\varepsilon}$ ($K>0$ 为常数，$\varepsilon>0$)，$f(t) \in L^2(\mathbf{R})$ 具有 Lipschitz 指数 $\alpha (0<\alpha<1)$，证明存在常数 C，使得小波变换满足

$$
|(Wf)(a,b)| \leqslant C a^{\alpha+\frac{1}{2}}
$$

3. 证明式(5.46) 和式(5.47)。

4. 证明式(5.76) 和式(5.77)。

5. 设 $f(t) \in V_0$，已知采样值为 $\{f(k)\}_{k=1}^N$，对于图 5.19 所示的最优小波基，试说明如何计算分解式(5.78) 中的系数 $d_{j,k}^n$？

第6章 小波分析的应用简介

小波分析的应用十分广泛，除了在数学和物理领域的许多学科，如微分方程求解、数值分析、量子力学、理论物理等学科中应用外，在其他自然科学中，例如在信号分析与图像处理、模式识别、语音的合成、医学成像与诊断、地震与勘探、自动控制、气象与水文、计算机视觉与图形学、故障诊断以及军事科学等诸多领域，都有成功的应用。随着小波理论的深入研究，它的应用还在不断扩展。

本章仅侧重于介绍小波分析在信号与图像处理方面的一些应用。目的在于使读者通过这些内容的学习，一方面加深对小波理论的理解，另一方面了解小波理论应用于实际的思想和方法，为进一步学习小波理论和应用打下基础。

6.1 函数的奇异性与小波变换

函数在某点处间断或某阶导数不连续，称函数在该点处有奇异性，该点称为奇异点。利用小波变换具有时频局部化的性能，可以对函数(信号)的奇异性进行分析，并确定奇异点的位置与奇异性的大小。

6.1.1 奇异性的 L 指数度量

利用5.1节中讨论过的Lipschitz指数 α 的概念，可以对常见的奇异点用 L 指数来度量。为此，先引入函数 $f(t)$ 与它的原函数 $F(t)$ 在 t_0 点处的 L 指数的关系。

引理6.1 若 $f(t)$ 的原函数 $F(t)$ 在 t_0 处的Lipschitz指数为 $\alpha+1(\alpha<0)$，则 $f(t)$ 在 t_0 处的 L 指数为 α。

对于斜坡形式或折线函数，设 t_0 是奇异点，显然有

$$|f(t_0+h)-f(t_0)|\leqslant c|h|,\quad c>0$$

此时，函数在 t_0 处的 L 指数 $\alpha=1$。

对于阶跃函数，设 t_0 是阶跃点，则有

$$|f(t_0+h)-f(t_0)|\leqslant c|h|^0,\quad c>0$$

显然，函数在 t_0 处的 L 指数为 $\alpha=0$。

对于 $\delta(t)$ 函数的奇异性度量，利用引理 6.1，由于 δ 函数的原函数是单位阶跃函数

$$u(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t\leqslant 0\end{cases}$$

即

$$\delta(t)=\lim_{h\to 0}\frac{u(t+h)-u(t)}{h}=\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$$

因此，由引理 6.1 可推知 δ 函数在奇异点处的 L 指数 $\alpha=-1$。

图 6.1 显示了三种函数的奇异点及奇异点处的 L 指数。

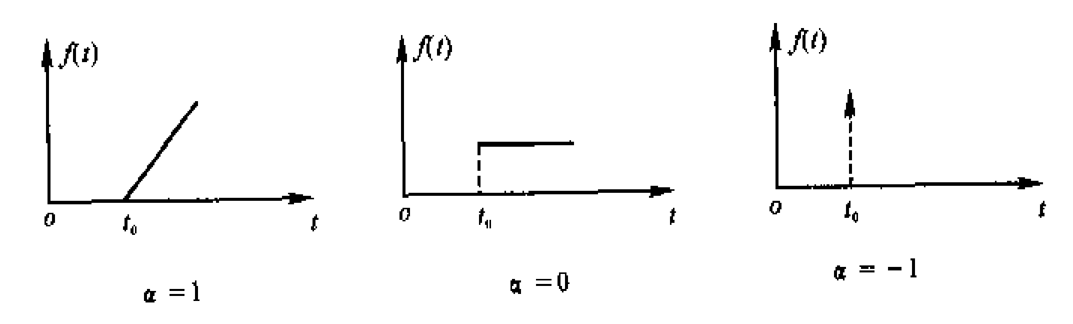


图 6.1　三种特殊函数及其奇异点处的 L 指数

从上面的讨论可以看出，函数的点态 Lipschitz 指数 α 可以刻画函数在奇异点处的突变程度。α 越大，函数在该点光滑程度越高，奇异性越小；而 α 越小，函数在该点处突变程度越大。

奇异点在信号和图像处理中称为边缘点或突变点，它包含了信号的重要特征。在信号和图像处理中，像边缘检测、去噪、信号的压缩与传输等都会涉及奇异点的问题。

6.1.2　函数的奇异性与小波变换

S. Mallat 将函数(信号)的局部奇异性与小波变换后的模局部极大值联系起来。通过小波变换后的模极大值在不同尺度上的衰减速度来衡量信号的局部奇异性。

定理 6.1　设小波 $\psi(t)$ 是实函数且连续，具有衰减性：$|\psi(t)|\leqslant K(1+|t|)^{-2-\varepsilon}$，$(\varepsilon>0)$，$f(t)\in L^2(\mathbf{R})$ 在区间 I 上是一致 Lipschitz 指数 $\alpha(-\varepsilon<\alpha\leqslant 1)$，则存在常数 $c>0$，使得对 $\forall a,b\in I$，其小波变换满足

$$|(Wf)(a,b)|\leqslant ca^{\alpha+\frac{1}{2}} \tag{6.1}$$

反之，若对于某个 $\alpha(-\varepsilon<\alpha\leqslant 1)$，$f\in L^2(\mathbf{R})$ 的小波变换满足式(6.1)，则 f 在 I 上具有一致 Lipschitz 指数 α。

若 t_0 是 $f(t)$ 的奇异点，则 $|(Wf)(a,b)|$ 在 $b=t_0$ 处取极大值，即此时式(6.1)等号成立。

在二进小波变换情形下，式(6.1)变成

$$|(Wf)(2^j,b)| \leqslant c \times 2^{j(\alpha+\frac{1}{2})} \tag{6.2}$$

在信号和图像处理中，常常使用卷积型小波变换。为此，这里引入卷积型小波变换的概念。

定义 6.1　设 $f(t),\psi(t) \in L^2(\mathbf{R})$，记

$$\psi_s(t) = \frac{1}{s}\psi\left(\frac{t}{s}\right), \quad s > 0 \tag{6.3}$$

则称

$$(Wf)(s,b) = f * \psi_s(b) = \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\psi\left(\frac{b-t}{s}\right)\mathrm{d}t \tag{6.4}$$

为 $f(t)$ 的卷积型小波变换，也称为 $f(t)$ 的小波变换。

使用前面引入的记号，记 $\psi^{-}(t) = \psi(-t)$，则在此之前定义的内积型小波变换与式(6.4)之间的关系为

$$\langle f, \bar{\psi}^{-}_{s,b} \rangle = f * (\sqrt{s}\psi_s)(b) \tag{6.5}$$

在定理 6.1 中，如果将 $f(t)$ 的小波变换理解成卷积型小波变换，则式(6.1)和式(6.2)就变成

$$|(Wf)(s,b)| \leqslant cs^{\alpha} \tag{6.6}$$

及

$$|(Wf)(2^j,b)| \leqslant c2^{j\alpha} \tag{6.7}$$

式(6.1)或式(6.2)表明，若 $\alpha > -\frac{1}{2}$，则小波变换模极大值随着尺度 j 的增大而增大；若 $\alpha < -\frac{1}{2}$，则小波变换模极大值随着尺度的增大反而减小。这种情况说明，该信号比不连续信号(例如阶跃信号，$\alpha = 0$)更加奇异，这正是噪声对应的情况。例如 Gauss 白噪声，它是几乎处处奇异的且是广义随机分布的，具有负的 Lipschitz 指数 $\alpha = -\frac{1}{2} - \varepsilon(\forall \varepsilon > 0)$。

上述情况说明，可以利用小波变换模的极大值随尺度变化的情况来推断信号的奇异点类型。例如，由式(6.7)，当尺度 j 增大而小波变换模反而减小，则可推断信号在奇异点处的 L 指数 $\alpha < 0$；相反情况下，$\alpha > 0$。当 j 变化时而小波变换的模值不变，则有 $\alpha = 0$。据此，还可以将信号与噪声加以区别。

6.2　非平稳信号的去噪

实际中所观测到的信号通常是非平稳信号，且带有白噪声

$$f(t) = x(t) + s(t) \tag{6.8}$$

式中，$x(t)$ 为原始信号，$s(t)$ 为 Gauss 白噪声。从观测信号 $f(t)$ 中直接把原始信号 $x(t)$ 提取出来是非常困难的，必须借助变换方法作为工具，而小波变换理论为信号的去噪提供了

较理想的方法。本节介绍三种常用的方法，主要从原理方面加以介绍。其他去噪方法请见文献[4,9,12]。

6.2.1 模极大值去噪法

这是一种基于模极大值原理的方法，在前一节中已经知道，信号和白噪声在小波变换下模极大值随尺度变化呈现不同的规律：信号（一般是连续或奇异但有界的，Lipschitz 指数 $\alpha \geqslant 0$）的小波变换模极大值随尺度增加而增加或不变，而白噪声（Lipschitz 指数 $\alpha < 0$）的模极大值随尺度增加反而减小。信号和白噪声在不同尺度的小波变换下表现的不同特性，使我们可以把它们加以区分。

基于上述原理，模极大值去噪方法的主要步骤如下：

(1) 对含噪信号进行尺度为 $s = 2^j, j = 1,2,\cdots,J$ 的小波变换，并求出每一尺度上的变换系数的模极大值；

(2) 从最大尺度（例如 $J = 4$）开始，确定一个阈值 T，把该尺度上模极大值小于 T 的极值点去掉，保留其余极值点，得到最大尺度上的一组新的模极大值点；

(3) 作出尺度 $j = J$ 上保留的每个极大值点的一个邻域，例如 $N(t_i,\varepsilon_j)$，在 $j-1$ 尺度上找出与邻域 $N(t_i,\varepsilon_j)$ 内极值点相对应的传播点（极值点），保留这些极值点，去掉其他极值点，从而得到 $j-1$ 尺度上一组新的极值点；

(4) 置 $j = j-1$，重复步骤(3) 至 $j = 2$ 为止；

(5) 在 $j = 2$ 时保存的极值点位置上，找出 $j = 1$ 时对应的极值点，而将其他极值点去掉（或置相应小波系数为零）；

(6) 利用各尺度上保留下来的极值点的小波系数，采取适当方法重构原信号。

利用上述方法可以达到信号的去噪目的，但在具体操作上还有一些技术问题需要解决。例如，J 取多大较合适；重构时由于只利用了有限个极大值点的小波系数，这样重构的信号与原始信号必有误差，如何构造与原始信号近似的小波系数，等等。此外，还需说明的是当信号是采样得到的离散含噪信号

$$f[n],\quad n = 0,1,\cdots,N-1$$

时，小波变换应采用 6.2.3 中式(6.14) 来计算，或者采用高通滤波器 $\{g_n\}$ 与 $f[n]$ 的离散卷积来计算。

对于离散的小波变换 $(Wf)(j,k) = (W_{2^j}f)[k]$，如果 $k = m$ 是一个极大值点，应满足

$$\begin{cases} |(W_{2^j}f)[m]| \geqslant |(W_{2^j}f)[m-1]| \\ |(W_{2^j}f)[m]| \geqslant |(W_{2^j}f)[m+1]| \end{cases}$$

且以上两式中不能同时取等号。

6.2.2 阈值去噪方法

阈值去噪方法的基本思想是，在对含噪信号 $f(t)$ 作小波分解后的各层系数中，对大于

和小于某一阈值的小波系数分别进行处理，然后再利用处理后得到的小波系数重构原信号，达到去噪目的。

设 $\omega_{j,k}$ 是观测信号 $f(t)$ 的小波系数，为书写简单，将 $\omega_{j,k}$ 记为 ω。$\eta(\omega)$ 表示阈值处理后的系数。η 也称阈值函数，表示对 ω 的模大于或小于阈值 T 的不同处理结果。在阈值去噪方法中，有两个关键问题，一个是阈值函数的选取，另一个是对阈值的具体估计。

1. 阈值函数的选取

常用的阈值函数有

(1) 硬阈值函数(见图 6.2(a))

$$\eta(\omega)=\begin{cases}\omega, & |\omega|\geqslant T\\ 0, & |\omega|<T\end{cases}\tag{6.9}$$

(2) 软阈值函数(见图 6.2(b))

$$\eta(\omega)=\begin{cases}(|\omega|-T)\ \mathrm{sign}(\omega), & |\omega|\geqslant T\\ 0, & |\omega|<T\end{cases}\tag{6.10}$$

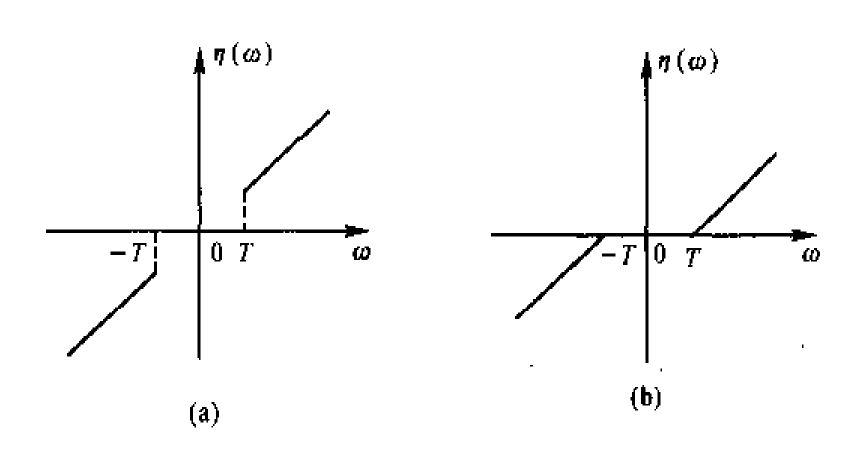


图 6.2　硬阈值函数(a) 和软阈值函数(b)

这两种阈值函数在实际中经常使用，也取得了较好的效果。但是方法本身存在着一些缺点。例如，硬阈值函数方法在 $\omega=T$，$\eta(\omega)$ 不连续，用 $\eta(\omega)$ 重构信号时会产生振荡；软阈值函数方法得到的 $\eta(\omega)$ 虽然连续性好，但在 $|\omega|>T$ 时，$\eta(\omega)$ 与 ω 存在着恒定偏差，直接影响重构信号的性质。因此为了克服上述阈值函数法的一些缺点，兼顾两种方法的优点，有必要对阈值函数进行一些改进。目前经改进已构造出一些效果较好的阈值函数。例如：

(1) 由多项式插值法构造

$$\eta(\omega)=\begin{cases}\omega, & |\omega|\geqslant T_2\\ \mathrm{sign}(\omega)\ P(|\omega|), & T_1\leqslant|\omega|<T_2\\ 0, & |\omega|<T_1\end{cases}\tag{6.11}$$

式中，$P(|\omega|)$ 为插值多项式，可取一次、二次或三次多项式。其插值条件分别为

$$\begin{cases}P(T_1)=0\\P(T_2)=T_2\end{cases},\quad\begin{cases}P(T_1)=0\\P(T_2)=T_2\\P'(T_2)=1\end{cases}\quad 和\quad\begin{cases}P(T_1)=0\\P'(T_1)=0\\P(T_2)=T_2\\P'(T_2)=1\end{cases}$$

式(6.11)表示的阈值函数，克服了硬阈值函数在点T处不连续，软阈值函数在$|\omega|$较大时，$\eta(\omega)$与ω总有一定偏差的缺点，因而使得去噪效果比较理想。但是它将要估计两个阈值T_1和T_2，实现起来比较困难。

(2) 由软、硬阈值折中法构造

$$\eta(\omega)=\begin{cases}\operatorname{sign}(\omega)\,(|\omega|-\lambda T), & |\omega|\geqslant T\\0, & |\omega|<T\end{cases},\quad 0\leqslant\lambda\leqslant 1 \tag{6.12}$$

$\eta(\omega)$的图形见图6.3。当$\lambda=0$和1时，式(6.12)就成为硬阈值函数和软阈值函数。当$0<\lambda<1$时，$\eta(\omega)$的值介于软、硬阈值函数得出的值之间，因而这种阈值函数去噪效果很好。它使得$\eta(\omega)$的值更接近原信号$x(t)$的小波变换的值。使用中还可以调整λ的大小，以获得更好的去噪效果。

还有一些其他的构造方法得出的阈值函数，请参阅文献[4,9,12]。

2. 阈值的估计

对阈值的具体估计也是一个关键问题。若阈值太小，达不到去噪效果；相反若阈值太大，信号的一些重要特征又将被滤掉，重构信号时会引起偏差。由于阈值的估计比较复杂，这里仅指出一种简单的估计结果，即

$$T=\sigma\sqrt{2\lg N}$$

式中，σ是噪声的标准方差，N是信号的长度。其他估值方法见文献[9]。

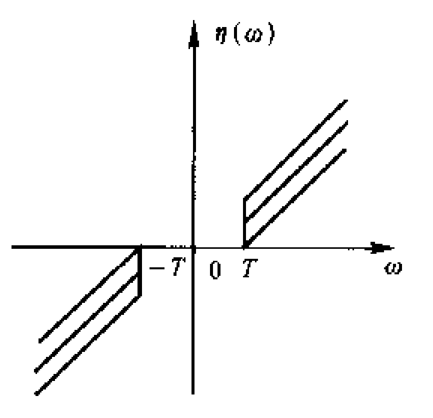


图6.3 由折中法构造的阈值函数

在实际中，T的估计应是自适应的，即应考虑到信号的相对平稳性和信噪比的大小。对于平稳性较差的信号，T值应选得小一些，相反情况T值应取得较大。对于同一信号，信噪比大时，噪声功率小，则T值取得小一些。

6.2.3 相关性去噪方法

相关性去噪法基本原理是利用信号的小波系数在各尺度上有较强的相关性，而噪声的小波系数在尺度间却没有明显的相关性的特点，由此来区分信号与噪声以达到去噪目的。

设对观测信号离散采样得到

$$f(n)=x(n)+s(n),\quad n=0,1,\cdots,N-1 \tag{6.13}$$

式中，$x(n)$ 为原始信号，$s(n)$ 为 Gauss 白噪声，服从 $N(0,\sigma^2)$。

对 $f(n)$ 进行小波变换，得

$$(Wf)(j,k) = 2^{-j/2}\sum_{n=0}^{N-1} f(n)\psi(2^{-j}n-k) \tag{6.14}$$

它即是 f 的小波系数，记为 $w_{j,k}$。由小波变换的线性性质可知，$w_{j,k}$ 仍由两部分组成，一部分是 $x(n)$ 对应的小波系数 $u_{j,k}$，另一部分是 $s(n)$ 的小波系数 $v_{j,k}$。

定义相邻尺度同一空间位置小波系数的相关量为

$$CW_{j,k} = w_{j,k}\, w_{j+1,k} \tag{6.15}$$

$CW_{j,k}$ 也称为尺度 j 上点 k 处的相关系数。

根据信号和噪声的小波系数随尺度变化传播的性质不同，相关量计算增强了信号的边缘等特征，更便于提取信号的特征。由于噪声的能量主要分布在小尺度上，因而随着尺度的增加噪声影响强度递减的性质，对于尽可能减小有效信息的损失是有利的。

为了简述相关性去噪法，这里引入归一化相关量的概念。

定义 6.2　设

$$\bar{w}_{j,k} = CW_{j,k}\sqrt{\frac{PW_j}{PCW_j}} \tag{6.16}$$

则称 $\bar{w}_{j,k}$ 为归一化相关量或归一化相关系数，其中 PW_j 表示第 j 层小波系数的能量，PCW_j 表示 j 尺度的相关系数的能量，即

$$PW_j = \sum_k w_{j,k}^2 \tag{6.17}$$

$$PCW_j = \sum_k CW_{j,k}^2 \tag{6.18}$$

相关性去噪法实现的主要原理是，比较 $\bar{w}_{j,k}$ 与 $w_{j,k}$，若 $|\bar{w}_{j,k}| \geq |w_{j,k}|$，则认为大相关量对应信号的特征，取 $\bar{w}_{j,k} = w_{j,k}$，置 $w_{j,k} = 0$；若 $|\bar{w}_{j,k}| < w_{j,k}$，认为点 k 处的小波变换由噪声控制，保留 $w_{j,k}$，置该点处的 $\bar{w}_{j,k} = 0$；之后，在每一尺度上重新计算 $\bar{w}_{j,k}$，重复上面的过程；最后，所取 $\bar{w}_{j,k}$ 中对应由信号控制的点，而 $w_{j,k}$ 中的点全都对应着噪声。

在上面的方法中，若小波分解过程中所计算的系数略有偏差，则由式(6.15)计算的 $CW_{j,k}$ 已经不能准确刻画点 k 处的真实相关性，因面依赖于 $\bar{w}_{j,k}$ 的相关性去噪法会引起偏差。文献[12]中介绍了一种区域相关的阈值滤波方法，较好地解决了上述问题。

区域相关的阈值滤波法的主要思想是改进 $CW_{j,k}$ 的计算，它既考虑到点 k 处的系数，还考虑到点 k 附近的小波系数，以削弱小波系数平移带来的影响。

定义 6.3　设

$$CN_{j,k} = N_{j,k}\, N_{j+1,k} \tag{6.19}$$

式中

$$N_{j,k} = \sum_{l=k-m}^{k+m} w_{j,l} \tag{6.20}$$

则称 $CN_{j,k}$ 为尺度 j 上的区域相关系数。

定义 6.4 设

$$\bar{N}_{j,k} = CN_{j,k}\sqrt{\frac{PN_j}{PCN_j}} \tag{6.21}$$

则称 $\bar{N}_{j,k}$ 为归一化区域相关系数。式中

$$PN_j = \sum_k N_{j,k}^2 \tag{6.22}$$

$$PCN_j = \sum_k CN_{j,k}^2 \tag{6.23}$$

类似于相关性去噪法，区域相关阈值法也需要比较 $\bar{N}_{j,k}$ 与 $N_{j,k}$ 的大小，$\bar{N}_{j,k}$ 与 $N_{j,k}$ 的可比性，是建立在 $\bar{N}_{j,k}$ 与 $N_{j,k}$ 具有相同能量的基础上。由定义 6.4 不难看出，$\bar{N}_{j,k}$ 与 $N_{j,k}$ 的能量是相同的。

区域相关阈值法算法步骤及试验效果等，请参阅文献[12]。

6.3 信号的边缘检测

本节主要介绍一维信号突变点的检测问题。突变点(即边缘点)包含了信号中的重要信息，是信号处理中经常用到的重要特征之一。图像是二维信号，有关图像的边缘检测问题将另外介绍。

一维信号的突变点粗略的区分有两种，一种是阶跃突变点，另一种是局部极值点。精确地检测并区分这两类边缘点有重要的理论意义和实用价值。例如，若某信号反映的是被监控机器运行的状态，则当发生故障或特殊情况时，信号就会发生突变，检测到这些突变信号，就可以对机器运行状态及故障进行分析、判断和控制。又如，在对地下或海底用声呐探物中，在对语音信号的分析与处理中，在对人体心、脑等检查得到的各种波形分析中，以及图像处理等诸多问题，都需要检测出突变点的具体位置和类型。

6.3.1 基本原理

信号的奇异性检测是先对原信号在不同尺度上进行“磨光”，再对磨光后信号的一阶或二阶导数检测其极值点或过零点。

对信号进行磨光处理，主要是为了消除噪声而不是边缘，因此磨光函数应是局部化的。常用的磨光函数(也称平滑函数)$\theta(t)$ 可选取 Gauss 函数或 B-样条函数。磨光函数满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t)\mathrm{d}t = 1 \tag{6.24}$$

$$\lim_{t\to\infty}\theta(t) = 0 \tag{6.25}$$

式(6.24) 表示 $\hat{\theta}(0) = 1$，即 $\theta(t)$ 可理解为低通滤波器。

在实际检测中，常取小波函数 $\psi(t)$ 是 $\theta(t)$ 的一阶或二阶导数，并且常用卷积型小波变换。例如，令

$$\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$$

显然 $\theta(t)$ 满足式(6.24) 和式(6.25)。

记

$$\psi^{(1)}(t) = \frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3}te^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \tag{6.26}$$

$$\psi^{(2)}(t) = -\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^5}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}(\sigma^2 - t^2) \tag{6.27}$$

容易验证 $\psi^{(1)},\psi^{(2)}$ 满足容许性条件：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^{(1)}(t)dt = 0 \tag{6.28}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^{(2)}(t)dt = 0 \tag{6.29}$$

因此 $\psi^{(1)},\psi^{(2)}$ 是容许小波，且 $\psi^{(1)}(t)$ 是反对称小波，$\psi^{(2)}(t)$ 是对称小波。

由定义 6.1 及卷积的性质，有

$$f*\psi_s^{(1)}(t) = f*\left(s\frac{d\theta_s}{dt}\right) = s\frac{d}{dt}(f*\theta_s(t)) \tag{6.30}$$

$$f*\psi_s^{(2)}(t) = f*\left(s^2\frac{d^2\theta_s}{dt^2}\right) = s^2\frac{d^2}{dt^2}(f*\theta_s(t)) \tag{6.31}$$

式(6.30) 和式(6.31) 中的卷积 $f*\theta_s(t)$，也称为磨光(或平滑)算子，表示 $f(t)$ 经算子作用后的一个信号。直观的意思是 $f(t)$ 的"角点"被 $\theta_s(t)$ 磨成光滑弧，从而使 $f(t)$ 变成一个光滑函数 $f*\theta_s(t)$。例如，取

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & |x| = \frac{1}{2} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

则 $f*\theta(t)$ 在任一点 t 上的值为 $f(x)$ 在单位长度区间上的平均，这种平均有压缩高频起伏而保留 $f(x)$ 的基本波形，从而去掉"角点"使 $f(x)$ 变为光滑。

式(6.30) 和式(6.31) 表示，$f(t)$ 的小波变换 $(Wf)(s,t) = f*\psi_s^{(1)}(t)$ 与 $f*\theta_s(t)$ 的一阶导数成正比。而 $(Wf)(s,t) = f*\psi_s^{(2)}(t)$ 与 $f*\theta_s(t)$ 的二阶导数成正比。这样，结合

定理 6.1，就可以说明小波变换用于信号边缘检测的基本原理，即选取光滑函数 $\theta(t)$ 以后，信号 $f(t)$ 的突变点，可以通过检测小波变换 $f*\psi_s^{(1)}(t)$ 和 $f*\psi_s^{(2)}(t)$ 的模极大值而得到。

利用上述原理，还可以进一步确定突变点的类型。若 t_0 点是 $f(t)$ 的阶跃突变点，则 $f*\psi_s^{(1)}(t)$ 在 t_0 处取得非零极大值，从而 t_0 是 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f*\theta_s(t))$ 的非零极大值点或 $f*\theta_s(t)$ 的拐点；若 t_0 是 $f(t)$ 的局部极值点（或脉冲点），则 t_0 是 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(f*\theta_s(t))$ 的非零极大值点（即 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f*\theta_s(t))$ 的过零点）。于是对于给定的尺度 s，$f*\psi_s^{(1)}(t)$ 的非零极大值点是 $f(t)$ 的阶跃突变点，$f*\psi_s^{(2)}(t)$ 的非零极人值点是 $f(t)$ 的局部极值点。

在上面的检测方法中，值得注意的是，这里只利用了两个小波变换的非零极大值点，没有利用相对应的两个过零点，因为过零点易受噪声干扰，且有时过零点不是 $f(t)$ 的突变点。结合 $\theta(t)$ 选取 Gauss 函数来说，常用反对称小波 $\psi^{(1)}(t)$ 检测阶跃突变点，用对称小波 $\psi^{(2)}(t)$ 检测局部极值点。可以证明，对于二进小波，这个结论与平滑函数 $\theta(t)$ 的具体选取无关。

在实际应用中，仅在一个尺度下检测突变点常常还很难确定真正的突变点的位置和类型，因此需要多尺度检测。只有在多个尺度上都是极值点的位置才是真正的突变点所在位置。

6.3.2 一维信号突变点检测及分类算法。

输入：一维信号 $\{f[n]\}, n=0,1,\cdots,N-1$。

输出：突变点位置及类型。

算法步骤：

(1) 选择小波 ψ，分解层次 J 和阈值 T。

(2) 对 $\{f[n]\}$ 进行二进小波变换，得各层小波系数：$\{(W_1f)[k]\}$，$\{(W_2f)[k]\},\cdots,\{(W_Jf)[k]\}$。

(3) 对 $\{(W_jf)[k]\}, j=1,\cdots,J$ 进行阈值处理，即若 $|(W_jf)[k]|<T$，则 $(W_jf)[k]=0$。

(4) 检测 $\{(W_jf)[k]\}, j=1,\cdots,J$ 的模极大值点，即如果 $k=m$ 是极大值点，则须满足下面 3 个条件。

1) $|(W_jf)[m]|\geqslant T$；

2) $|(W_jf)[m]|\geqslant|(W_jf)[m-1]|$ 且 $|(W_jf)[m]|\geqslant|(W_jf)[m+1]|$；

3) $|(W_jf)[m]|>|(W_jf)[m-1]|$ 或 $|(W_jf)[m]|>|(W_jf)[m+1]|$；

可得 $t_j[0],t_j[1],\cdots,t_j[l_j], j=1,2,\cdots,J$。

(5) 对第(4) 步得到的点逐一检查是否是各尺度上的极值点,得到奇异点

$$t[0], t[1], \cdots, t[s]。$$

(6) 根据所选择的小波是反对称的还是对称的,确定得到的点是阶跃边缘点还是屋顶边缘点(即局部极值点)。

(7) 输出结果。

6.4　小波在图像处理中的一些应用

图像是二维信号,是一种特殊的信息,在许多领域已有成功应用。在图像处理中,图像的去噪、识别、压缩、恢复等都是关键性的技术,小波分析在这些方面都有重要的应用。本节重点介绍图像的边缘检测,与此相关的,如图像的去噪、分割、识别、恢复等问题,不再介绍,对图像的压缩只作简要的叙述。

6.4.1　图像的小波分解

在 5.3 节中介绍过 $L^2(\mathbf{R}^2)$ 的二元多分辨分析 $\{V_j^2\}_{j\in\mathbf{Z}}$,并且已有

$$L^2(\mathbf{R}^2) = \bigcup_{j\in\mathbf{Z}} V_j^2$$
$$L^2(\mathbf{R}^2) = \lim_{j\to-\infty} V_j^2 \tag{6.32}$$

及

$$V_{j-1}^2 = V_j^2 \oplus W_j^2 \tag{6.33}$$

其中,$W_j^2 = (V_j \otimes W_j) \oplus (W_j \otimes V_j) \oplus (W_j \otimes W_j)$ 由三个小波空间的正交和构成。

由于在实际中图像的分辨率总是有限的,故总可以设 V_0^2 是具有最高分辨率的图像空间,于是对于已知图像 $f(x,y)$,总有 $f(x,y) \in V_0^2$,式(5.43) 给出了图像的小波分解为

$$f(x,y) = f_0(x,y) = f_J(x,y) + \sum_{j=1}^{J} g_j(x,y) \tag{6.34}$$

式中,$f_J(x,y)$ 是 $f(x,y)$ 在空间 V_J^2 上的投影,即 $f(x,y)$ 在尺度 $J(J=1,2,\cdots)$ 下的连续逼近,也称“模糊像”。

$$g_j(x,y) = \sum_{k,m} [d_{j,k,m}^1 \varphi_{j,k}(x)\psi_{j,m}(y) + d_{j,k,m}^2 \psi_{j,k}(x)\varphi_{j,m}(y) + d_{j,k,m}^3 \psi_{j,k}(x)\psi_{j,m}(y)],\quad j=1,\cdots,J \tag{6.35}$$

表示 $f(x,y)$ 在尺度 j 下的三个方向 —— 水平、铅直、对角线 —— 上的“细节”。

当图像是由采样得到的离散形式 $f(m,n)(m,n \in \mathbf{Z})$ 时,类似于一维信号,有 $f(m,n) = c_{0,m,n} = c_0(m,n)$。由于前面建立的 $L^2(\mathbf{R}^2)$ 的多分辨分析采用了张量积的形式,所以图像分解与重构可以由一对滤波器来完成。图像的小波分解与重构算法如式(5.46) 与式(5.47)。这里再次写出上述公式(记号略有不同):

分解算法

$$\left.\begin{aligned}c_{j+1}(m,n) &= \sum_l \sum_k c_j(l,k)h(l-2m)h(k-2n) \\ d_{j+1}^1(m,n) &= \sum_l \sum_k c_j(l,k)h(l-2m)g(k-2n) \\ d_{j+1}^2(m,n) &= \sum_l \sum_k c_j(l,k)g(l-2m)h(k-2n) \\ d_{j+1}^3(m,n) &= \sum_l \sum_k c_j(l,k)g(l-2m)g(k-2n)\end{aligned}\right\} \tag{6.36}$$

重构算法

$$C_j(m,n) = \sum_l \sum_k c_{j+1}(l,k)h(m-2l)h(n-2k) + \sum_l \sum_k [d_{j+1}^1(l,k)h(m-2l)g(n-2k) + d_{j+1}^2(l,k)g(m-2l)h(n-2k) + d_{j+1}^3(l,k)g(m-2l)g(n-2k)] \tag{6.37}$$

式(6.36)、式(6.37)中的$\{h(k),g(k)\}$是一维尺度函数和小波函数$\{\varphi,\psi\}$对应的滤波器，并且$\sum_k h(k)=\sqrt{2}$。

分解算法实际上就是将一幅图像通过二维小波变换分解成一系列尺度、方向和空间局部变化的子带。公式(6.36)可以看成对图像$\{C_0(m,n)\}$经两次滤波(分别对两个变量作变换或滤波)得到一个模糊子图$\{C_1(m,n)\}$和三个锐化子图$\{d_1^1(m,n)\}$，$\{d_1^2(m,n)\}$及$\{d_1^3(m,n)\}$。如果记H_0，G_0为分解算法所用的低通和高通滤波器，H_1，G_1为重构算法所用的低通和高通滤滤器，则分解与重构算法可用图6.4(a)、图6.4(b)分别表示。

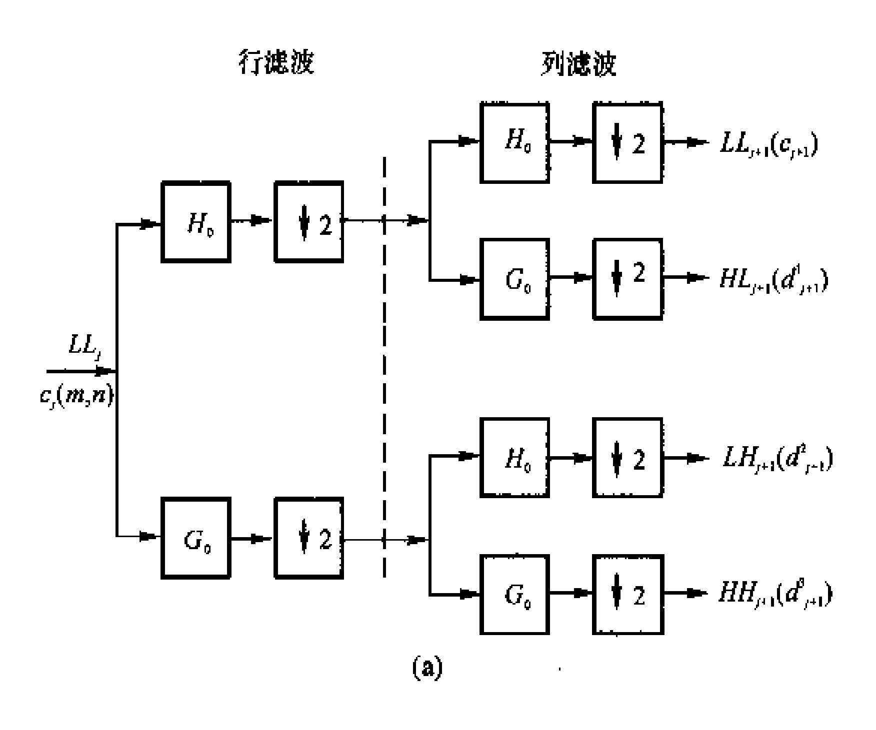


图6.4　图像的小波分解与重构数据流程图

(a) 分解过程

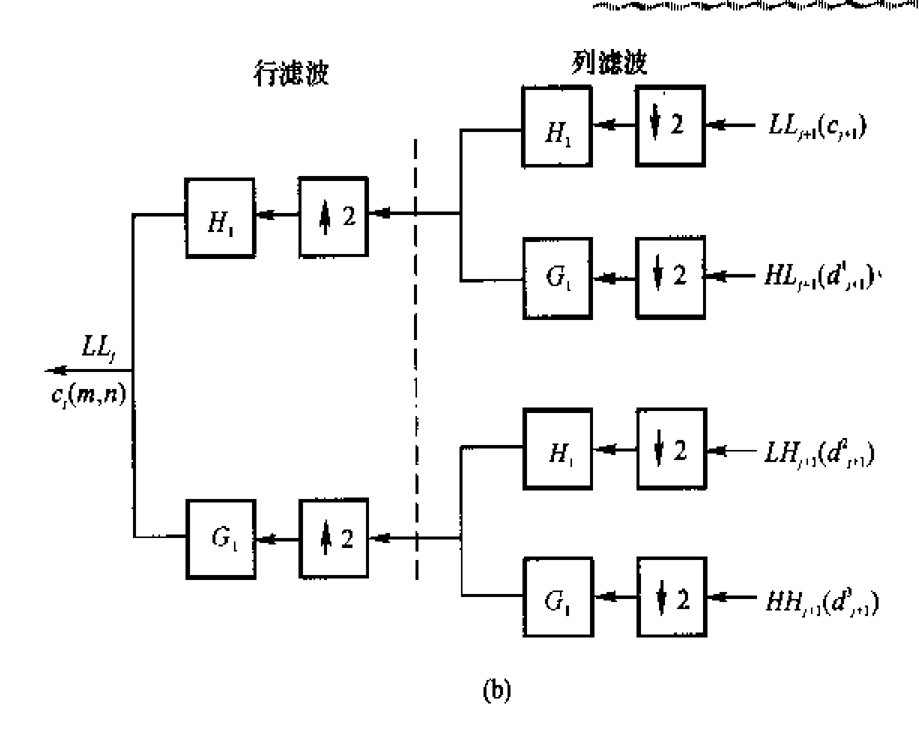


图 6.4　图像的小波分解与重构数据流程图(续)

(b) 重构过程

一幅图像，经一次小波分解得到 4 个子图。图 6.5 给出原图像(记为 LL_0) 经两级分解的示意图。

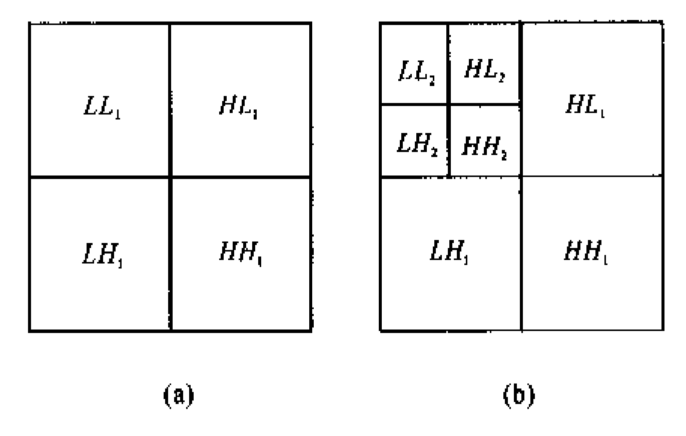


图 6.5　图像分解中各方向子带示意图

图 6.5 中，LL_j 为低频子带(水平和垂直方向，即 $c_0(m,n)$ 的行和列均经过一系列低通滤波)，HL_j 为水平方向高频子带，LH_j 为垂直方向高频子带，HH_j 为对角线方向高频子带。因此，常将相应的小波系数 d_j^1 记成 d_j^h，d_j^2 记成 d_j^v，d_j^3 记成 d_j^d。

一幅图像经小波分解后，可得一系列不同分辨率的子图像。这是对图像进行各种处理的基础，尤其是在图像压缩方面。

6.4.2　图像的边缘检测

图像的边缘是图像平面灰度值或颜色发生突变的点连接成的曲线段。显然，图像的边

缘是图像的重要特征。找出图像的边缘称为边缘检测，也称为边界提取，它对于图像的分割、识别、压缩、恢复等都是非常重要的。

目前图像的边缘检测已有许多方法。这里，仅在一维信号奇异检测的基础上介绍二维信号的奇异点检测问题。

设 $\theta(x,y)$ 是二元平滑函数，满足

$$\int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}}\theta(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1 \tag{6.38}$$

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\theta(x,y) = 0 \tag{6.39}$$

式(6.39)表示 $\theta(x,y)$ 有较好的局部化特性。

记

$$\left.\begin{aligned}\psi^{(1)}(x,y) &= \frac{\partial\,\theta(x,y)}{\partial\,x}\\ \psi^{(2)}(x,y) &= \frac{\partial\,\theta(x,y)}{\partial\,y}\end{aligned}\right\} \tag{6.40}$$

则由式(6.39)，有

$$\int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}}\psi^{(1)}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\mathbf{R}}[\theta(+\infty,y)-\theta(-\infty,y)]\mathrm{d}y = 0$$

$$\int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}}\psi^{(2)}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\mathbf{R}}[\theta(x,+\infty)-\theta(x,-\infty)]\mathrm{d}x = 0$$

因而 $\psi^{(1)}(x,y)$，$\psi^{(2)}(x,y)$ 是二维容许小波。

在实际中，由于得到的 $f(x,y)$ 都是带有噪声的，所以先要对 $f(x,y)$ 进行平滑处理，以去除噪声。为了在去噪过程中不把边界点去除，要求平滑函数 $\theta(x,y)$ 有较好的局部化性质，一个很好的选择是令 θ 为二元 Gauss 函数，即

$$\theta(x,y) = \frac{1}{4\pi\alpha}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{4\alpha}} \tag{6.41}$$

数学上可以证明，对 $f(x,y)$（连续图像）用式(6.41)的 $\theta(x,y)$（α 取充分小的正数）进行平滑后，结果与 $f(x,y)$ 几乎一样，即

$$f*\theta(x,y)\approx f(x,y),\quad \alpha\text{ 充分小} \tag{6.42}$$

图像的边界点反映到函数 $f(x,y)$ 上，就是函数值突然改变的点。于是由式(6.42)，可以通过 $f*\theta(x,y)$ 的导数确定这些点。

类似一维情形的讨论，记

$$\theta_s(x,y) = \frac{1}{s^2}\theta\left(\frac{x}{s},\frac{y}{s}\right),\quad s>0 \tag{6.43}$$

再由卷积型小波变换的定义 6.1 及式(6.40)，有

$$(W_s^{(1)}f)(x,y) = f*\psi_s^{(1)}(x,y) = s\frac{\partial\,[f*\theta_s(x,y)]}{\partial\,x} \tag{6.44}$$

$$(W_s^{(2)}f)(x,y) = f * \psi_s^{(2)}(x,y) = s\frac{\partial[f*\theta_s(x,y)]}{\partial y} \tag{6.45}$$

由此，$f*\theta_s(x,y)$ 的梯度可表示为

$$\mathrm{grad}[f*\theta_s(x,y)] = i\frac{1}{s}(W_s^{(1)}f)(x,y) + j\frac{1}{s}(W_s^{(2)}f)(x,y) \tag{6.46}$$

式中，i 和 j 相应于 x 轴和 y 轴。而梯度的模为

$$|\mathrm{grad}[f*\theta_s(x,y)]| = \frac{1}{s}\sqrt{|(W_s^{(1)}f)(x,y)|^2 + |(W_s^{(2)}f)(x,y)|^2} \tag{6.47}$$

回忆函数在一点处梯度的定义可知，若 $|\mathrm{grad}[f*\theta_s(x,y)]|$ 在点 (x_0,y_0) 达到极大值，则函数 $f*\theta_s(x,y)$ 或由式(6.42) 认为是 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处具有最大的方向导数，从而 $f(x,y)$ 在该点处函数值有突变，而突变发生的方向是沿着 $\mathrm{grad}[f*\theta_s(x,y)]$ 所指的方向。这样，可以认为 (x_0,y_0) 就是图像 $f(x,y)$ 的边界点，边界的走向沿着与 $\mathrm{grad}[f*\theta_s(x,y)]$ 垂直的方向。

在连续的情况下，$\mathrm{grad}[f*\theta_s(x,y)]$ 的方向可由它与 x 轴正向的夹角

$$\alpha_s = \arctan\left(\frac{\partial[f*\theta_s(x,y)]}{\partial y}\Big/\frac{\partial[f*\theta_s(x,y)]}{\partial x}\right) = \arctan(W_s^{(2)}f(x,y)/W_s^{(1)}f(x,y)) \tag{6.48}$$

来表示。记

$$A_sf(x,y) = \tan\alpha_s = (W_s^{(2)}f)(x,y)/(W_s^{(1)}f)(x,y) \tag{6.49}$$

$$M_sf(x,y) = \sqrt{|(W_s^{(1)}f)(x,y)|^2 + |(W_s^{(2)}f)(x,y)|^2} \tag{6.50}$$

称 $M_sf(x,y)$ 为 $f(x,y)$ 小波变换的模。由式(6.47)，得

$$|\mathrm{grad}[f*\theta_s(x,y)]| = \frac{1}{s}M_sf(x,y)$$

当 $f(x,y)$ 由离散数据点给出时，$A_sf(x,y)$ 就不能准确表示。但由于离散数据在采样时就确定了在一个点的周围只有 8 个邻接点，因此只需考虑 8 个方向。在这种情形下，把一个平面分成 8 个扇形区，每个扇形区的中心线标上箭头表示一个梯度方向，如图 6.6 所示。为方便每个方向及所在的扇形区用一个标码来表示，例如标码可取 0,1,2,3。当 $A_sf(x,y)$ 的值落在下列区间之一(显然每个区间对应一个扇形区)：

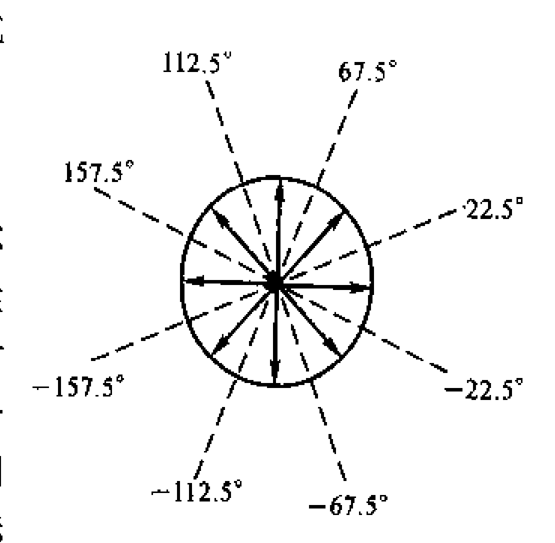


图 6.6　离散梯度方向图
1— 虚线表示平面的 8 个扇区；
2— 箭头表示 8 个梯度方向

$$[-1-\sqrt{2},1-\sqrt{2}),\quad [1-\sqrt{2},\sqrt{2}-1),$$
$$[\sqrt{2}-1,\sqrt{2}+1),\quad [\sqrt{2}+1,+\infty)\cup(-\infty,-1-\sqrt{2}]$$

就用 $\mathrm{code}A_s f(x,y)=0$ 或 1,2,3 来表示 $A_s f(x,y)$ 对应的梯度方向。

图像边缘检测算法

(1) 输入:离散二维图像 $\{f(m,n)\mid 0\leqslant m\leqslant M,0\leqslant n\leqslant N\}$。

(2) 输出:图像边缘点。

(3) 算法步骤:

1) 选取二进小波 $\psi^{(1)},\psi^{(2)}$(即选取光滑函数 θ_{2^j} 为 Gauss 函数或样条函数),确定分解层次 J 和模阈值 T。

2) 对 $f(m,n)$ 进行离散小波变换,得 $\{(W_{2^j}^{(1)}f)(l,k),(W_{2^j}^{(2)}f)(l,k),\}_{(l,k)\in M\times N}$,$j=1,2,\cdots,J$。

3) 计算模值,得 $\{M_{2^j}f(l,k)\}_{(l,k)\in M\times N}$,$j=1,\cdots,J$。

4) 对模值进行阈值处理。

若 $|M_{2^j}f(l,k)|\geqslant T$,保留,否则置 $M_{2^j}f(l,k)=0$,$j=1,\cdots,J$。

5) 检测 $M_{2^j}f(l,k)$ 的局部极大值点,得 $\{P_j(x_i,y_i)\}_{i\in\mathbf{N}}$,$j=1,\cdots,J$。

6) 对第 5) 步得到的极值点逐一检查是否是各尺度上的极值点,得到边界点 $\{P(x_i,y_i)\}_{i\in\mathbf{N}}$,并计算 $\mathrm{Code}Af(x_i,y_i)$。

7) 形成边界曲线:边界点连接。连接原则是:邻近点相连,灰度相近的点相连,走向与该点的 $Af(x_i,y_i)$ 垂直。

注:1) J 不宜取得太长,$J=2$ 或 3 即可。

2) 小波的选择,若是二进对称的小波,得到的是屋顶状边缘;若是二进反对称的小波,得到的是阶跃状边缘。

6.4.3 图像的数据融合

数据融合是一种信息处理综合技术,它将来自多传感器或多源的信息和数据进行综合处理,得出更准确可信的结论。图像的数据融合是指利用数据融合技术对数字图像进行某种处理,使得能更有效地表示目标的检测信息。例如,对同一物体用不同焦距拍摄到两张影像,为了得到更清晰的影像需要将拍摄到的两张影像进行融合。

小波变换的多分辨率分析能够在时间域和频率域同时对信号进行局部化分析,对高频分量采用逐步精细的时域或空域步长,可聚焦到对象的任意细节,对剧烈变化的边缘也有很好的适应性。因而它在图像融合中起着重要作用。在 6.4.1 已经说明,图像经二维小波变换分解后,可以得到频域上不同频率段的子图:

低频分量(用 LL 或逼近系数 $c_j=\{c_{j,k}\}$ 表示)、水平高频分量(用 HL 或小波系数 d^h 表示)、垂直高频分量(用 LH 或小波系数 d^v 表示)及对角分量(用 HH 或小波系数 d^d 表示)。

图 6.7 表示了图像经二层小波分解的结果。

c_2	d_2^h	d_1^h
d_2^v	d_2^d	
d_1^v		d_1^d

图 6.7　图像的二层小波分解示意图

图像数据融合的基本过程，可用图 6.8 表示。从图中可以看出图像融合的关键部分是融合决策（方法）部分。这里介绍一种简单的基于像素的融合方法，较复杂的方法有利用统计的方法、多小波方法等。

图像数据融合的基本步骤：

(1) 设分解层次为 J（一般取 $J=2$ 或 3），按式(6.36) 计算图像的小波分解系数（记 $d^h=d^1, d^v=d^2, d^d=d^3$）。

(2) 在各尺度 $j(j=1,\cdots,J)$ 上，将 A,B 两幅图像的各高频子图的小波系数 $w_{j,k}^A, w_{j,k}^B$ 进行比较，把对应位置上绝对值较大的系数保留，即

$$w_{j,k}^F=\begin{cases} w_{j,k}^A, \text{若} |w_{j,k}^A|>|w_{j,k}^B| \\ w_{j,k}^B, \text{若} |w_{j,k}^A|<|w_{j,k}^B| \end{cases}$$

式中，$w_{j,k}^A, w_{j,k}^B$ 分别表示 A,B 图像在尺度 $j(j=1,2,\cdots,J)$ 上各高频分量的小波系数，如 $w_{j,k}^A$ 表示在尺度 j 上，$w_{j,k}^{Ah}, w_{j,k}^{Av}, w_{j,k}^{Ad}$ 三个方向的高频系数；$w_{j,k}^F$ 表示融合图像在尺度 j 上的三个方向的高频系数：$w_{j,k}^{Fh}, w_{j,k}^{Fv}, w_{j,k}^{Fd}$。

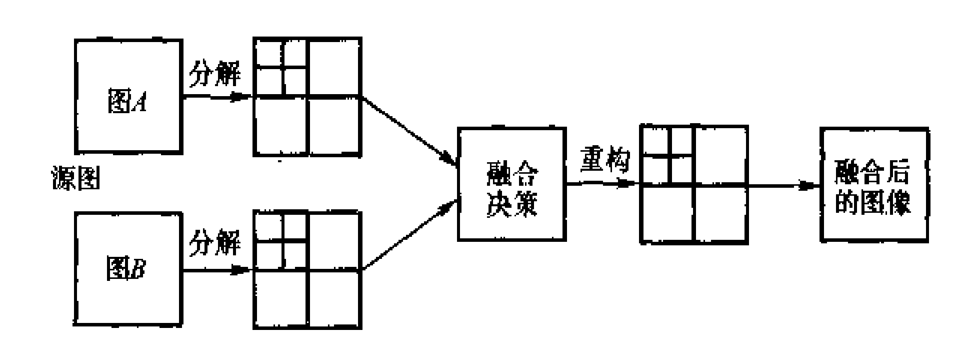


图 6.8　图像数据融合过程示意图

(3) 融合后的逼近系数 $c_J^F=\{c_{J,k}^F\}$ 可取

$$c_J^F=(c_J^A+c_J^B)/2$$

(4) 利用以上得到的所有小波系数 $w_{j,k}^F$ 和 c_J^F，由重构公式(6.37)，可得融合图像的数据表示。

各种图像融合方法的区别主要表现在融合决策方法上。这里仅介绍了最基本的一种方法，在这个方法基础上，如果考虑到图像像素与它相邻像素的相关性，可以将第(2) 步中比较对应位置的小波系数，改为对应窗口内小波系数，窗口大小可取为 3×3 或 5×5，窗口位置以围绕边缘选取，还可进一步考虑其他改进，甚至把单小波改为两个或两个以上的多小波等。

各种方法融合后的效果，可以通过融合前后图像的信噪比和均方差的比较来判断。当

然这与所选的小波对应的分解与重构滤波器有关。

6.4.4 图像的数据压缩与传输

图像包含的信息很多,数字化形式表示以后一般都是巨大的数据量。而现今社会对图像通信的需求越来越大,质量要求也越来越高,例如高清晰度的数字电视。可视化电话的兴起与普及已成为强大趋势,市场需求潜力巨大。然而,计算机处理图像的数据时,需要大量的存储空间,而给一定容量的传输信道造成了巨大的压力和困难。所以,如果没有一个有效的压缩方法,图像通信就难以实现。

图像通信主要包括压缩、传输和恢复,显然首要的任务就是进行数据压缩,这里有许多研究工作要做。

数据压缩主要包括无损压缩(无失真)和有损压缩(有失真)两大类。无损压缩是指图像数据压缩以后还可以完全复原的,复原后的图像与原始图像完全一致;而有损压缩则是指经压缩后的数据仅保留原图像的特征,丢掉了一部分不重要的原图像信息,而复原后的图像在视觉效果上可以接受。

图像数据之所以能够压缩,主要有两个原因:① 原始图像相邻像素之间存在着相关性,即图像的信息存在着冗余度。如果去掉这些冗余信息,当然就会减小传输量。② 由于人眼的视觉对于边缘急剧变化不敏感,对颜色的分辨率较弱,而对图像亮度信息敏感。所以可以利用人类视觉特性有针对性地去掉一些不重要的数据。

图像压缩的方法很多,目前小波变换方法已逐步取代基于其他变换或其他子带编码技术,成为新的图像压缩国际标准的主要方法。

基于小波变换的压缩方法有好多种,例如,小波包最好基方法、小波纹理模型方法、小波变换零树法、小波变换向量化压缩法、渐近式图像编码法等。这里仅介绍嵌入式小波变换零树法,而且只说明基本原理和过程。

在数据压缩中,经常要遇到度量信息量的大小及衡量压缩程度的指标。当涉及这些概念时为使读者便于理解,这里引入熵和压缩比的概念。

定义 6.5 设事件 x_i 发生的概率为 $P(x_i)$,则事件 x_i 所具有的信息量为

$$H(x_i) = -\log_2 P(x_i)$$

信息量的单位为比特(bit),意为表示该事件(字符)所需的最少位数,称 $H(x_i)$ 为事件 x_i 的熵。

对于一个信息列 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,其平均信息熵定义为

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} P(x_i)\log_2 P(x_i)$$

定义 6.6 对于某种数据压缩方法,压缩比定义为

$$\text{压缩比} = \frac{\text{源代码长度} - \text{压缩后代码长度}}{\text{源代码长度}} \times 100\%$$

小波变换除了具有“聚焦”功能外，还具有能量集中和去冗余性、去相关性的特征。小波变换应用于图像数据压缩和传输中，其特点是压缩比高，压缩速度快，压缩后保持图像的特征不变，且在传输中还可以抗干扰。正因为如此，ISO/IEC 组织制定的 JPEG2000 静态图像压缩标准中以小波变换作为图像编码的变换方法。

图像压缩通常的方法是先对图像数据进行变换，再对变换后的数据进行量化（或编码），接着进行压缩与传输，如图 6.9 所示。

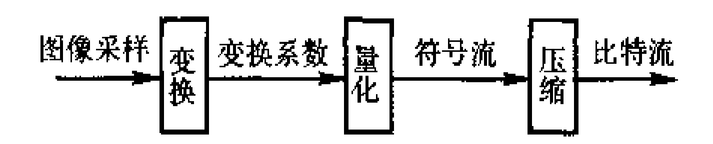


图 6.9　图像压缩与传输过程

编码技术可以说是一种复杂的数学运算或变换过程，编码理论的发展已有 50 多年的历史，这里不予以涉及，只简单介绍嵌入式小波系数零树编码法的原理和过程。

在 6.4.1 中已看到，经小波分解（变换）后，一幅图像被分解成若干级的子带，例如，分成了三级 10 个子带，如图 6.10 所示。对于同级图像，低频子带图 LL_j 最重要，高频子带图不重要，其按重要性排序是 HL_j，LH_j，HH_j。对于不同级来说，级高者重要，级低者不重要。子带图按其重要性总体排序为 LL_3，HL_3，LH_3，HH_3，HL_2，LH_2，HH_2，HL_1，LH_1，HH_1，如图 6.10 所示。编码和传输时按上述次序进行。

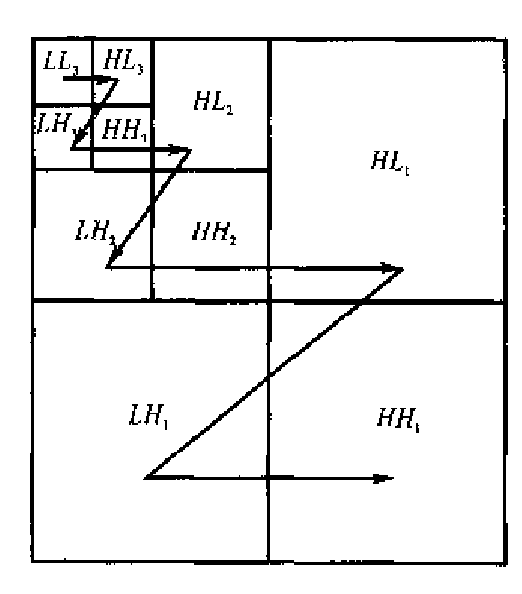


图 6.10　子带图排序示意图

低频子带图之所以重要，因为它包含的小波系数值大，图像的信息多，对视觉比较重要。高频子带反映了图像的细节，对视觉不重要。

一幅图像的嵌入式编码，类似于对一个实数进行二进制逼近。经过对子图编码把一个图像变成一个比特流，将这些比特流按上述的重要性进行排序。嵌入式编码可以根据失真度大小或目标的码率随时结束，解码时也一样。

小波系数所具有的特点是能较好地实现图像编码的嵌入功能。嵌入式小波系数零树编码系统有三个主要过程：① 零树预测；② 用零树结构编码重要图；③ 逐次逼近量化。下面说明一下前两个过程。

设 T 是一个阈值（或门限），x 表示各子图的小波系数，如果 $|x|<T$，则称小波系数 x

是不重要的，否则，称小波系数 x 是重要的。如果一个小波系数在粗尺度上关于阈值 T 是不重要的，再看它的子系数(即较细尺度上在同样空间位置上的 4 个系数，例如，对于子图 HL_3，其小波系数 $d_3^h[m,n]$ 的子系数是 $d_2^h[2m,2n]$，$d_2^h[2m,2n+1]$，$d_2^h[2m+1,2n]$，$d_2^h[2m+1,2n+1]$) 关于阈值是否重要。如果它的各级子系数不重要(即所有子系数都小于 T)，则称这些小波系数形成一个零树。这时，在粗尺度上的那个系数称为母体，它是树根，在较细尺度上的相应空间位置上的系数称为孩子。如果一个小波系数 x 关于门限 T 是不重要的，但它的子孙中有关于门限 T 是重要的，则称 x 是孤立零。这样，所有子图的小波系数只是下列三种情形之一：① 零树根；② 孤立零；③ 重要系数。为了编码需要，又把重要系数和重要图一起编码，而重要系数又分为正重要系数和负重要系数。此时的四个特殊符号可用如下编码表示

ZTR = 零树根，　　IZ = 孤立零，

POS = 正重要系数，　　NEG = 负重要系数。

当编码到最高分辨率层时，零树根不存在，此层系数中没有 ZTR 码。上述编码还可以用两个比特来表示。

图像的小波变换子带图，经上述零树结构编码后，在不同层次上会有许多“零树”，而零树中许多系数的位置都由零树根所确定，存储和传输时只需零树根一个元素。这样使得描述重要系数($|x| \geq T$) 的位置信息大为减少，从而图像得到充分压缩。

上而仅说明了利用小波变换进行图像压缩的原理，并不是嵌入式小波零树编码的全过程，因为这其中的核心部分 —— 逐次逼近量化方法 —— 还未涉及。如果实际使用零树编码压缩图像，还需要使用一些技巧，以形成具体算法。有兴趣的读者请参阅文献[3,9]等。

6.5 偏微分方程的小波 Galerkin 法

Galerkin 方法是在偏微分方程数值计算中较好的办法，由于它计算简单，可以很好地求解很多实际问题。本节主要介绍如何将 Galerkin 方法引入小波理论，从而说明小波分析在微分方程求解中的应用。这里只以简单的语言介绍小波 Galerkin 方法，以展现小波应用的一个方而，而不追求数学理论的完备，如果读者对此方法感兴趣请参阅文献[15]。

6.5.1 Galerkin 方法

考虑如下偏微分方程的边界值问题：

$$\left.\begin{aligned} &L[u(x,y)] = 0 \quad in D(x,y) \\ &S(u) = 0 \quad on \partial D \end{aligned}\right\} \tag{6.51}$$

其中，L 为偏微分算子①，$D(x,y)$ 为边界值问题的定义域，∂D 为定义域的边界，$S(u)$ 表示边界条件。

假设 $u(x,y)$ 可以近似由 $\{g_i(x,y)\}_{i=1}^{N}$ 线性表出，即

$$u(x,y) \approx u_a(x,y) = u_0(x,y) + \sum_{i=1}^{N} a_i g_i(x,y) \tag{6.52}$$

式中，u_0 满足初始条件，代入式(6.51)，令

$$R(a_1,a_2,\cdots,a_N,x,y) = L\left[\sum_{i=1}^{N} a_i g_i(x,y)\right] + L[u_0(x,y)]$$

应用变分法虚功原理有

$$\begin{aligned}&< R(a_1,a_2,\cdots,a_N,x,y),g_i(x,y) >= \\ &\quad \sum_{j=1}^{N} a_j < L[g_j(x,y)],g_i(x,y) > + < L[u_0(x,y)],g_i(x,y) > = 0, \\ &\qquad\qquad i = 1,2,\cdots,N\end{aligned} \tag{6.53}$$

于是原方程求解就变为如下代数方程组的求解：

$$\begin{pmatrix} < L[g_1(x,y)],g_1(x,y) > & < L[g_2(x,y)],g_1(x,y) > & \cdots & < L[g_N(x,y)],g_1(x,y) > \\ < L[g_1(x,y)],g_2(x,y) > & < L[g_2(x,y)],g_2(x,y) > & \cdots & < L[g_N(x,y)],g_2(x,y) > \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ < L[g_1(x,y)],g_N(x,y) > & < L[g_2(x,y)],g_N(x,y) > & \cdots & < L[g_N(x,y)],g_N(x,y) > \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} < L[u_0(x,y)],g_1(x,y) > \\ < L[u_0(x,y)],g_2(x,y) > \\ \vdots \\ < L[u_0(x,y)],g_N(x,y) > \end{pmatrix} \tag{6.54}$$

6.5.2　小波 Galerkin 方法

在 Galerkin 方法中选取的基函数 $g_i(x,y)$ 为二维函数，所以首先要构造出二维小波函数（如解决更高维问题，则还需构造多维小波）。高维小波函数有张量积形式与非张量积形式，对于非张量积形式高维小波的构造，有兴趣可以参阅文献[16]，这里同 5.3 节一样，采用张量积形式来说明小波 Galerkin 方法的一般步骤。

在 5.3 节中已经有二维张量积形式小波空间 W_j^2，它由三个空间的正交和构成：

$$W_j^2 = (\boldsymbol{V}_j \otimes \boldsymbol{W}_j) \oplus (\boldsymbol{W}_j \otimes \boldsymbol{V}_j) \oplus (\boldsymbol{W}_j \otimes \boldsymbol{W}_j)$$

式中，$\boldsymbol{V}_j$ 和 $\boldsymbol{W}_j$ 为一维尺度函数空间和小波函数空间，并且二维张量积形式小波空间的基由以下三个波基构成：

① 这里算子 L 为满足变分法求解微分方程的条件，关于算子 L 应具备的条件详细请参见文献[15]。

$$\begin{cases}\psi^1(x,y)=\varphi(x)\psi(y)\\ \psi^2(x,y)=\psi(x)\varphi(y)\\ \psi^3(x,y)=\psi(x)\psi(y)\end{cases}$$

式中，$\varphi(\cdot)$，$\psi(\cdot)$ 是一维尺度函数和小波函数。

对应的二维尺度函数空间为 $V_j^2=V_j\otimes V_j$，其中 V_j 为一维尺度函数空间。由 $L^2(\mathbf{R}^2)$ 上多分辨分析理论，有如下空间分解(见式 5.37)：

$$\bigoplus_{j\in\mathbf{Z}}W_j^2=L^2(\mathbf{R}^2)$$

前面已有 $V_0^2=V_0\otimes V_0=\mathrm{span}\{\varphi(x-k_1)\varphi(y-k_2);k_1,k_2\in\mathbf{Z}\}$，令

$$u(x,y)\approx u_0(x,y)+\sum_{k_2}\sum_{k_1}\alpha_{k_1,k_2}\varphi(x-k_1)\varphi(y-k_2) \tag{6.55}$$

式中，k_1，k_2 的范围取决于选取尺度函数具体形式和原方程定义域，故此处省略。类似前边 Galerkin 方法的处理，得

$$\begin{aligned}&\sum_{k_1}\sum_{k_2}\alpha_{k_1,k_2}<L[\varphi(x-k_1)\varphi(y-k_2)],\varphi(x-l_1)\varphi(y-l_2)>=\\ &\quad -<L[u_0(x,y)],\varphi(x-l_1)\varphi(y-l_2)>\end{aligned} \tag{6.56}$$

式中，l_1，l_2 取值范围与 k_1，k_2 相同。

关于小波空间 W_0^2，类似地有

$$\begin{aligned}W_0^2=&(V_0\otimes W_0)\oplus(W_0\otimes V_0)\oplus(W_0\otimes W_0)=\\ &\mathrm{span}\{\varphi(x-k_1^1)\psi(y-k_2^1);k_1^1,k_2^1\in\mathbf{Z}\}\oplus\\ &\mathrm{span}\{\psi(x-k_1^2)\varphi(y-k_2^2);k_1^2,k_2^2\in\mathbf{Z}\}\oplus\\ &\mathrm{span}\{\psi(x-k_1^3)\psi(y-k_2^3);k_1^3,k_2^3\in\mathbf{Z}\}\end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}u(x,y)\approx u_0(x,y)&+\sum_{k_1^1}\sum_{k_2^1}\alpha_{k_1^1,k_2^1}\varphi(x-k_1^1)\psi(y-k_2^1)+\\ &\sum_{k_1^2}\sum_{k_2^2}\alpha_{k_1^2,k_2^2}\psi(x-k_1^2)\varphi(y-k_2^2)+\sum_{k_1^3}\sum_{k_2^3}\alpha_{k_1^3,k_2^3}\psi(x-k_1^3)\psi(y-k_2^3)\end{aligned}$$

同样 $k_1^1,k_2^1,k_1^2,k_2^2,k_1^3,k_2^3$ 的范围取决于小波支集和原方程定义域，这里也省略。

与前边类似，由虚功原理就可得到：

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{k_1^1}\sum_{k_2^1}\alpha_{k_1^1,k_2^1}<L[\varphi(x-k_1^1)\psi(y-k_2^1)],\varphi(x-l_1^1)\psi(y-l_2^1)>=\\ &\qquad -<L[u_0(x,y)],\varphi(x-l_1^1)\psi(y-l_2^1)>\\ &\sum_{k_1^2}\sum_{k_2^2}\alpha_{k_1^2,k_2^2}<L[\psi(x-k_1^2)\varphi(y-k_2^2)],\psi(x-l_1^2)\varphi(y-l_2^2)>=\\ &\qquad -<L[u_0(x,y)],\psi(x-l_1^2)\varphi(y-l_2^2)>\\ &\sum_{k_1^3}\sum_{k_2^3}\alpha_{k_1^3,k_2^3}<L[\psi(x-k_1^3)\psi(y-k_2^3)],\psi(x-l_1^3)\psi(y-l_2^3)>=\\ &\qquad -<L[u_0(x,y)],\psi(x-l_1^3)\psi(y-l_2^3)>\end{aligned}\right\} \tag{6.57}$$

如果选择的小波函数具有有限支集，则从代数方程组式(6.57)中系数矩阵的元素可以看出系数矩阵是分块带状矩阵，计算复杂度就会适当降低。如 $< L[\varphi(x-k_1^1)\psi(y-k_2^1)], \varphi(x-l_1^1)\psi(y-l_2^1) >$，若 $\mathrm{Supp}\psi=[a,b]$，则当 $|k_2^1-l_2^1|>|b-a|$ 时该部分为零。

本节旨在对小波分析在微分方程中的应用作一简单扼要的介绍，故未涉及较多方程理论。小波 Galerkin 方法仍不尽完善，有很多可发展之处，如在引入尺度空间和小波空间之前对原方程定义域进行剖分，可以从一定程度上提升算法精度。从本节可以看到小波 Galerkin 方法算法复杂度较高，如何适当地选取小波函数，降低算法复杂度也值得研究。需要说明的是利用小波理论求解微分方程的方法还有很多，请参阅文献[9,17 - 18]。

6.6　小波变换在天文图像处理中的应用

太阳的活动影响着人类生存的日地环境，太阳至少30亿年来一直保持稳定的光度。同时，激烈的太阳活动及其周期变化，又影响和调制着人类生存的环境。在人类活动早已扩展到地球之外的今天，研究太阳活动又成为认识人类地球外的可居住性和预报日地环境中灾变事件的基本要求。众所周知，不息演化的太阳磁场在巨大的空间尺度产生不稳定性和灾变过程，太阳耀斑释放的磁能相当于几十亿次核爆炸的能量，而由磁场驱动的日冕物质抛射，每次将数十亿吨的磁化等离子体抛人日球空间。激烈的太阳活动引起地球磁场和电离层强烈的扰动，导致短波无线电通信中断，供电系统破坏，长距离输油管道过早损坏，空间飞行器发生故障，宇航人员健康受到伤害以及远距离导航失灵等破坏性事件。实时地监视和预报太阳活动事件及其对人类环境的影响，已经成为太阳物理工作者和日地物理工作者的一个最富有挑战性的任务。

6.6.1　太阳射电频谱仪和定标理论

太阳射电天文学诞生于20世纪40年代，是射电天文学和太阳物理学之间的一个新兴的交叉学科，它是利用太阳射电望远镜来观测研究太阳的射电辐射，并结合太阳的其他电磁波辐射和粒子发射的资料，而进一步揭示太阳物理本质的一门自然科学。

中国科学院国家天文台现有三个太阳射电望远镜在工作，分别对应三个频段的频谱仪(1.0～2.0 GHz,2.6～3.8 GHz,5.2～8.6 GHz)，已取得很好的观测结果，其中5.2～8.6 GHz 频谱仪有 120 个通道，每一个通道是一个频率，频率间隔是 20 MHz，观测记录的资料有0.2 s的秒级记录和5 ms的毫秒级记录两种格式，两者均采用左右旋圆偏振分时记录；2.6 ～ 3.8 GHz 频谱仪也有 120 个通道，但其频率间隔是 10 MHz，观测记录的资料有 0.2 s 的秒级记录和 8 ms 的毫秒级记录两种格式，两者均采用左右旋圆偏振分时记录。在

例行观测的每天中午记录一个当天的 0.2 s 级的定标文件，分别记录了 120 个通道的宁静太阳、背景太阳、噪声、终端的值，也分左、右旋，这些定标资料为以后定标工作做准备。每天观测也记录了仪器的增益特性曲线，分左、右旋记录了120个通道的增益特性曲线。所有记录的观测值只是接收机的读数，并不是流量，要把读数转换成流量，就需要定标。

定标的主要步骤为：

(1) 每天中午时都对接收机用标准噪声源进行定标，分别对太阳、背景、噪声源及终端测量，这个过程实际上是将接收机的读数转化为天线温度，若已知噪声源的噪声温度，那么由这个过程就可以得到天线温度。

(2) 对宁静太阳的测量，分别测量太阳、背景、噪声源及终端。这个过程实际上是对天线、馈源进行定标，并将天线温度与太阳流量联系起来。

设 S_f 是太阳的流量，$A(f)$ 是天线的频率特征，$r(f)$ 是接收机的频率特征，$N(f)$ 则是噪声源的辐射流量。S_f 经过天线、接收机后，在接收机的读数为 $R_a(S)$，$N(f)$ 则直接进入接收机，读数为 $R_a(N)$，如图 6.11 所示。如果接收机的增益有线性和稳定性，则有

$$R_a(S) \propto S_f A(f) r(f)$$

和

$$R_a(N) \propto N(f) r(f)$$

如 $A(f) = 1$，则由上面的公式可得

$$S_f = \frac{R_a(S)}{R_a(N)} N(f) \propto \frac{R_a(S)}{R_a(N)} T(f) = T_a$$

式中，$T(f)$ 是噪声源的噪声温度，T_a 是天线温度，上式为绝对定标的公式。

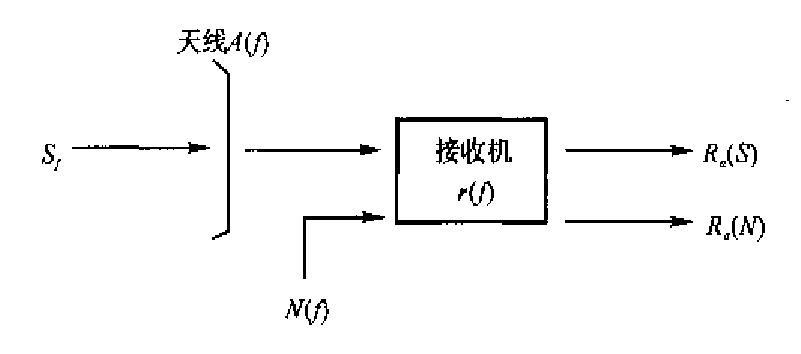


图 6.11　定标基本原理图

实际应用中，$\Delta T_a = \frac{R_a - R_s}{R_1 - R_2}(T_1 - T_2)$，式中 $\Delta T_a = T_a - T_s$，其中 T_a 为天线温度，T_s 则为背景辐射天线温度，而 R_a，R_s，R_1 和 R_2 分别是太阳、背景、噪声源和终端在接收机上的读数，令 $K(f) = \frac{R_a - R_s}{R_1 - R_2}$，称其为定标常数，则有

$$\Delta T_a = K(f)(T_1 - T_2) \tag{6.58}$$

上述参数中若加下标0则是表示在宁静太阳时的测量。由于噪声源和终端的温度是相对稳定的，即 $T_1 - T_2$ 的值可以看做是一个常数，因此$\dfrac{\Delta T_a}{\Delta T_{a0}} = \dfrac{K(f)}{k_0(f)}$是一个仅与太阳流量有关的值。这样，如果知道宁静太阳的流量及每天的定标常数，就可以得到

$$S_f = \frac{K(f)}{K_0(f)} S_{f0} \tag{6.59}$$

从而得到太阳的流量值。为了排除偏振的影响，只选取太阳在没有爆发和黑子时的SGD(宁静太阳射电辐射流量)资料，通过拟合得到太阳的频谱曲线，然后计算观测频段内各个频率通道内宁静太阳的流量，从而得到 S_{f0}，而 $K_0(f)$ 和 $K(f)$ 分别由天线定标当天的数据和需要定标的当天的定标数据得到，从而可以通过式(6.59)计算得到太阳的流量。

在理想情况下，频谱仪在观测宁静且没有黑子的太阳时，所得太阳辐射的圆偏振度在1%的精确度内应该为零，但实际上由于天线的指向，接收机的寄生偏振，以及传输线的影响都使得测得的宁静太阳的圆偏振度不为零。

6.6.2 小波变换分离太阳射电频谱图中的纤维结构

小波分析具有很多优于Fourier分析的性质，在天文图像和信号处理中有广泛应用。例如，在射电综合孔径中，小波变换在图像恢复时用于去除噪声；分析太阳射电42SER和41F型爆发及尖峰辐射的动态频谱特性；针对数据采样的组合率产生的干扰及接收仪器本身的特征随时间变化而产生的低频干扰，采用小波谱去噪算法；利用小波变换增强太阳射电动态频谱图；等等。本节以利用小波变换分离太阳射电频谱图中的纤维结构为例，来说明小波变换在天文图像处理中的应用。

由于太阳射电纤维精细结构爆发信息是叠加在宁静太阳射电背景和爆发的热辐射成分(对应于频谱的低频部分)之上的，但因只对纤维结构感兴趣，所以首先要去除总背景，提取纤维精细结构。为此，须对原始的动态频谱图进行小波变换，小波变换的多分辨性质使得它能够提取出信号在各个频带中的信息，原始图像经过一级小波变换后由四部分组成：低频分量，水平高频分量，垂直高频分量，以及对角高频分量，低频部分对应于宁静太阳射电及被平滑了的爆发信息。

由多分辨分析，第 j 级上的平滑函数 $f_j(x,y)$ 由第 $j+1$ 级上的平滑函数 $f_{j+1}(x,y)$ 和细节函数 $g_{j+1}(x,y)$ 线性叠加而成，假设信号的最高分辨率为1，则有

$$f_0(x,y) = f_J(x,y) + \sum_{l=1}^{J} g_l(x,y) \tag{6.60}$$

据此，一幅图像可被分解成多个频率，如图 6.12 所示（其中 A 为低频分量；H、V、D 分别表示水平高频分量、垂直高频分量和对角高频分量）。

随着小波变换尺度的增大，爆发信息在低频部分逐渐被平滑，因此选择较大的小波变换尺度，对原始图像进行小波变换，由低频分量重构原始图像，就可以得到较清晰的背景信息，然后令原始的动态频谱图减去这个背景，这样，纤维结构就得到了分离。

经过反复试验证明，采用 5 级小波变换能得到较好的背景信息，这里选取 Symlet 小波，因为 Symlet 小波具有紧支撑性、正交性，且近于对称，能够精确重构原信号。

A	…	H_2	H_1
…	…		
V_2		D_2	
V_1			D_1

图 6.12　图像分解示意图

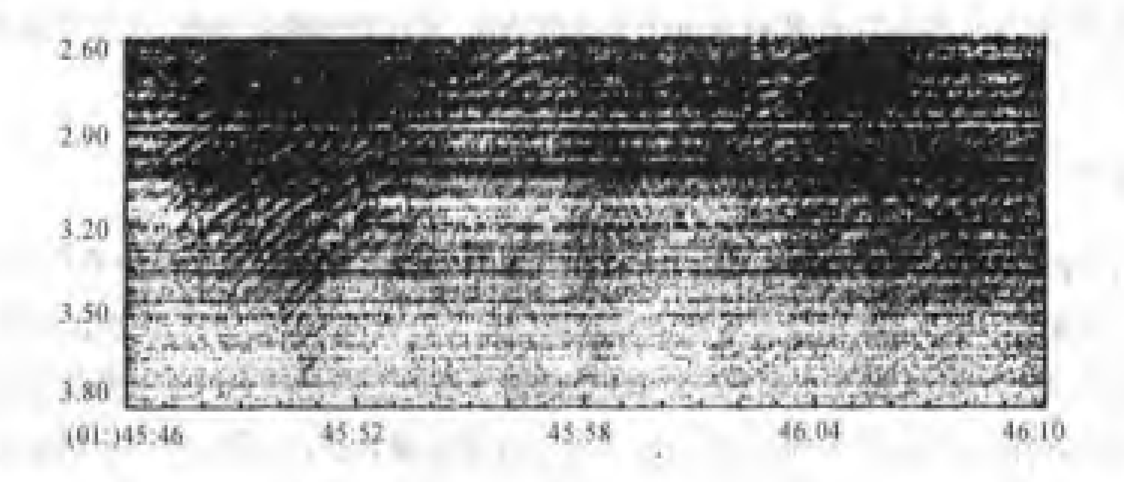


图 6.13　原始频谱图

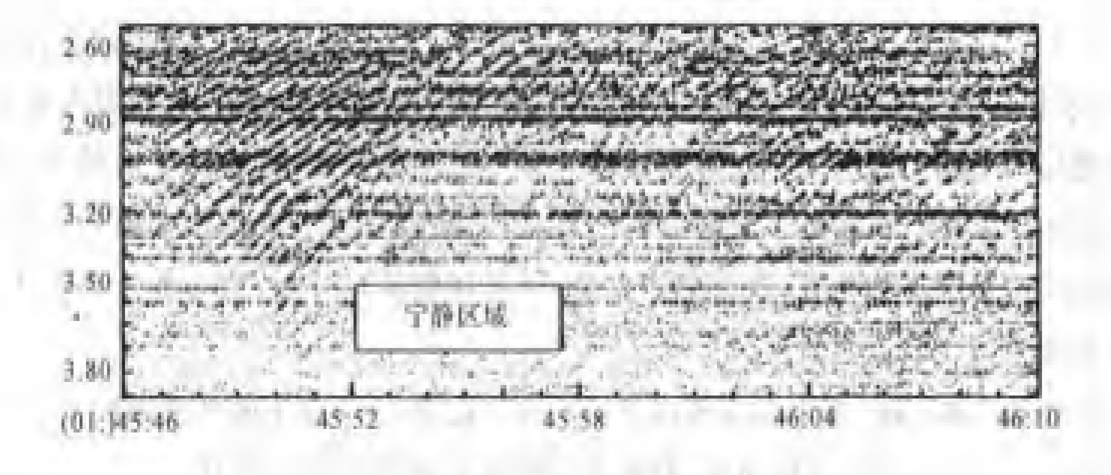


图 6.14　去背景后频谱图

图 6.13 为原始频谱图，在去掉背景的频谱图（见图 6.14）上，纤维精细结构虽然分离出来了，但噪声水平并没有降低。去除总背景后频谱图的信噪比为 11.601 8. 这些噪声会影响对纤维结构的研究。一般来说噪声强度值比纤维结构的强度值要小，通过选取一定的阈值，对除去背景后的频谱图实行软阈值处理，就可将噪声去掉。设除去背景后的频谱图为 H，则对其进行软阈值（这里取阈值 $\sigma = c \cdot \overline{h_q}$，$\overline{h_q}$ 为图 6.14 所示的宁静区域的均值，$c = 3 \sim 6$）处理为

$$H'(i,j) = \begin{cases} 0, & H(i,j) < \sigma \\ H(i,j) - \sigma, & H(i,j) \geqslant \sigma \end{cases}, \quad \sigma \text{为阈值}$$

阈值处理后的频谱图如图 6.15 所示。

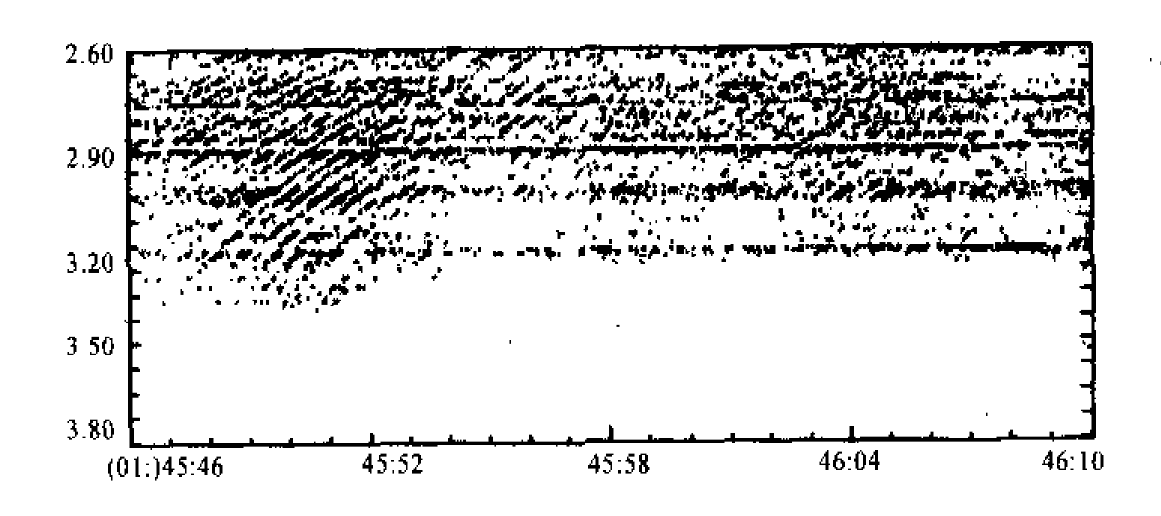


图 6.15　阈值处理后频谱图

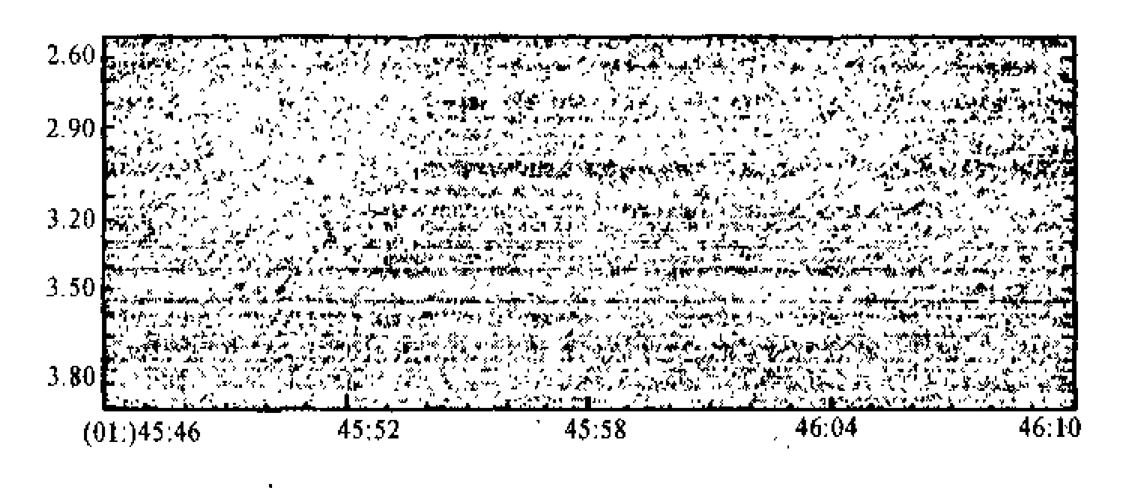


图 6.16　阈值处理去掉的部分

经阈值处理后的频谱图的信噪比为 29.659 8，噪声水平大大降低了，而且从图 6.16 可以看出经过阈值处理后丢掉的信息中没有明显的纤维结构，从而不会影响对纤维结构的提取。

6.7 脊波变换简介

在本章开始说过，小波分析在诸多领域都有着广泛而成功的应用。但随着应用的深入发展，人们发现，由一维小波张成的二维小波在二维图像的“点奇异”表示上是最优，但对于“线奇异”的表示却不是最优。而线边缘或纹理的奇异性恰恰是图像最重要的信息，因此，需要寻找比小波更为有力的变换方法。

1998—1999年，E. J. Candes和D. L. Donoho在小波理论基础上，对小波母函数增加了一个表征方向的参数，从而建立了脊波(Ridgelet)变换的理论。脊波变换不但具有局部时频分析的能力，还具有方向选择和辨识能力。Candes提出的脊波变换将二维函数中的“直线奇异”转化为“点奇异”，再利用小波变换进行处理，能获得对含“直线奇异”的二维或高维函数最优的非线性逼近阶。

实验表明，脊波在直线特征的表示和提取中非常有效。为了进一步表示多维信号中的曲线型奇异，又发展出局部脊波变换和曲波(Curvelet)方法，用多个尺度的局部直线来近似表示整条曲线。关于这些内容和相关的应用以及脊波理论的进一步发展这里均不予以介绍，有兴趣的读者请参阅有关文献。本节的目的仅是对脊波理论作简单概括的介绍。

6.7.1 脊波和连续脊波变换

这里总假设 $x \in \mathbf{R}^d$，考虑 $d(d \geqslant 2)$ 维空间中的函数 $f(x) \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d) \cap L^2(\mathbf{R}^d)$。

定义 6.7 设 $\psi:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 是 Schwartz 空间 $S(\mathbf{R})$ 中的函数。若满足容许条件

$$K_\psi = \int \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|^d} \mathrm{d}\omega < \infty \tag{6.61}$$

则称 $\psi(t)$ 是 d 维空间中的容许神经激活函数(Admissible Neural Activation Function)。

若 ψ 满足式(6.61)，令

$$\psi_\gamma(x) = a^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{ux - b}{a}\right) \tag{6.62}$$

则称 ψ_γ 为脊波(Ridgelet)，式中 $\gamma = (a,u,b) \in \Gamma = \{(a,u,b): a,b \in \mathbf{R},\ a > 0, u \in S^{d-1}\}$，$S^{d-1}$ 是 d 维空间中的单位球面，分别称 a 为尺度参数，b 为位置参数，u 为方向参数。

由式(6.62)可以看出，脊波是在小波函数中增添了方向参数 u。$ux = b$ 称为脊线，脊波的支撑是沿脊线两侧的带状区域：$\{x \in \mathbf{R}^d : |ux - b| < c\}$，在垂直脊线方向的横截面上可以得到一条小波曲线。这样一来，脊波函数就是在小波的基础上增加了沿脊线方向的信息，它可以有效地检测图像中具有方向性的线状奇异特征。

连续脊波变换定义为

$$R(f)(\gamma) = \langle f, \psi_\gamma \rangle \tag{6.63}$$

图 6.17 表示二维脊波函数的几种变换。

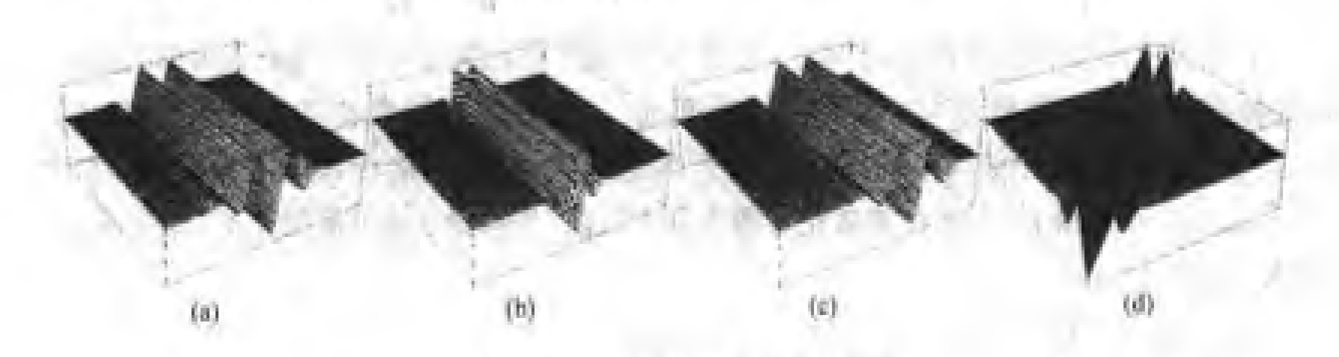


图 6.17　二维脊波函数的几种变换

(a) 原脊波函数；(b) 尺度变换后的函数(压缩)；(c) 平移变换后的函数；(d) 旋转变换后的函数

下面给出重要的重构定理和其他两个定理。

定理 6.3　(重构定理) 设函数 $f,\hat{f}(\omega)\in L^1(\mathbf{R}^d)$，$\psi$ 满足容许条件式(6.61)，则有

$$f = C_\psi\int < f,\psi_\gamma > \psi_\gamma(x)\mu(\mathrm{d}\gamma) \tag{6.64}$$

式中，$C_\psi = \pi(2\pi)^{-d}K_\psi^{-1}$，$\mu(\mathrm{d}\gamma)=\frac{\mathrm{d}a}{a^{d+1}}\sigma_d u\mathrm{d}b$ 为参数空间 Γ 上的测度(其中 σ_d 是 S^{d-1} 的表面积，$\mathrm{d}u$ 是 S^{d-1} 上的一致概率测度)。

定理 6.4　对于 $\forall f,g\in L^2(\mathbf{R}^d)$，设 ψ 满足容许条件，则有

$$< f,g >= C_\psi\int R(f)(\gamma)R(g)(\gamma)\mu(\mathrm{d}\gamma) \tag{6.65}$$

定理 6.5　(Parseual 等式) 设 $f\in L^1\cap L^2(\mathbf{R}^d)$，且 ψ 满足容许性条件，则有

$$\| f\|_2^2 = C_\psi\int |R(f)(\gamma)|^2\mu\mathrm{d}(\gamma) \tag{6.66}$$

6.7.2　离散脊波变换

为简单计，这里只介绍工程中常用的二维情形，即仅考虑 $d=2$。此时，满足容许条件的 ψ 生成的脊波可写成

$$\psi_{a,\theta,b} = a^{-\frac{1}{2}}\psi\left(\frac{x_1\cos\theta + x_2\sin\theta - b}{a}\right) \tag{6.67}$$

其支撑是沿脊线(直线)两侧的带状区域：

$$\{(x_1,x_2):|x_1\cos\theta + x_2\sin\theta - b|\leqslant a\}$$

对于 $\forall f\in L^2(\mathbf{R}^2)$，其脊波变换为

$$Rf(a,\theta,b) = < f,\psi_{a,\theta,b} > = \int f(x)\,\overline{\psi_{a,\theta,b}}(x)\mathrm{d}x \tag{6.68}$$

且有完全重构公式

$$f = \int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\infty} Rf(a,\theta,b)\psi_{a,\theta,b}(x)\,\frac{da}{a^3}db\,\frac{d\theta}{4\pi} \tag{6.69}$$

上面的公式可以看成用 ψ_γ 表示 f，其表示“系数”是连续的，为了克服表示的冗余性，需要将参数 a,θ,b 离散性化。用离散化后的 $\psi_{j,l,k}(x)$ 对 f 作脊波变换可得到 $\{<f,\psi_{j,l,k}>\}_{j,l,k\in\mathbf{Z}}$。和在小波情形类似，自然会产生这样一个问题：能否以数值稳定的方法用 $\{<f,\psi_{j,l,k}>\}$ 重构 f？为此在离散化参数空间 Γ 以前，先假设 ψ 是可框架化的，即要求 $\psi\in C^1(\mathbf{R})$ 且满足

(1) $\inf\limits_{1\leqslant|\omega|\leqslant 2} \sum\limits_{j>0} |\hat{\psi}(2^{-j}\omega)|\,|2^j\omega|^{-(d-(1)} > 0$；

(2) $|\hat{\psi}(\omega)| \leqslant |\omega|^{\alpha}(1+|\omega|)^{-s}$，其中 $\alpha > \frac{d-1}{2}$，$s > 2+\alpha$。

在式(6.67)中，分别对三个参数离散化：令 $a = 2^{-j}$，$\theta_{j,l} = \frac{2\pi}{2^j}l$，$(l = 0,1,2^j-1)$，$b = 2^{-j}k$，从而得到

$$\{\psi_{j,l,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j(x_1\cos\theta_{j,l} + x_2\sin\theta_{j,l}) - k)\}_{j,l,k\in\mathbf{Z}} \tag{6.70}$$

这样，就可以用脊波变换系数集 $\{<f,\psi_{j,l,k}>\}_{j,l,k}$ 完全重构 f。

在上面的离散化中，对表示方向的角度 θ 离散化采样步长是和尺度成反比，$\theta_{j,l}$ 表示对于分划 $\frac{2\pi}{2^j}$ 的第 l 个方向角。尺度和角度同时离散化将二维平面分解成如图6.18所示的冠状结构，即把第 j 个同心圆环 $\{\omega:2^{j-1}\leqslant|\omega|\leqslant 2^j\}$ 所表示的区域，按角度参数又等分成 2^j 个子区域，这些子区域就是脊波 $\psi_{j,l,k}$ 的支撑集。

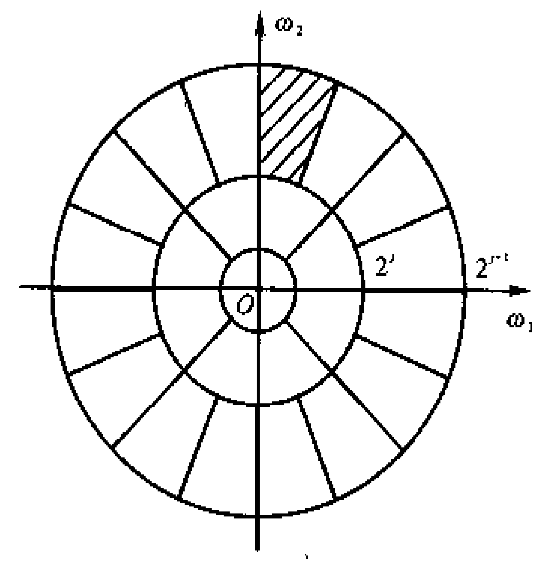


图6.18　二维离散脊波频域平面剖分图

脊波变换和 Radon 变换关系非常密切。一个函数 f 的脊波变换可以通过先对 f 作 Radon 变换，再对其作一维小波变换而得到，即

$$R(f)(\gamma) = <R_u f,\psi_{a,b}> \tag{6.71}$$

式中，$R_u f(t)$ 为函数 f 的 Radon 变换，即

$$R_u f(t) = \int_{ux=t} f(x)dx \tag{6.72}$$

而 $\psi_{a,b}$ 是通常的一维小波。

在二维情形，Radon 变换可写成：

$$Rf(\theta,t) = \int_{x_1\cos\theta+x_2\sin\theta=t} f(x_1,x_2)dx_1dx_2$$

或

$$Rf(\theta,t)=\int f(x_1,x_2)\delta(x_1\cos\theta+x_2\sin\theta-t)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

由式(6.71) 可知，二维离散脊波变换为

$$<f,\psi_{j,l,k}>=<Rf(\theta_{j,l},\cdot),\psi_{j,k}> \tag{6.73}$$

由式(6.73) 可知，函数 f 的离散脊波变换可以看成先对 f 作 Radon 变换，然后再对其作小波变换而得到。

Radon变换的几何意义是将原始图像投影到角度为 θ 的直线 x_p 上。如果原始图像中含有直线型边缘，当边缘与直线 x_p 垂直时，Radon 变换的值变化最剧烈。Radon 变换将“线奇异”变为“点奇异”，而小波变换在检测点奇异时特别有效。

由式(6.71) 可知，脊波变换 $Rf(\gamma)$ 还可以表示为

$$R(f)(\gamma)=\frac{1}{2\pi}<\hat{R}uf,\hat{\psi}_{a,b}>=\frac{a^{1/2}}{2\pi}\int\hat{f}(\omega u)\hat{\psi}(a\omega)\mathrm{e}^{ib\omega}\mathrm{d}\omega \tag{6.74}$$

在应用中，为计算式(6.73) 中的离散脊波变换，还要借助式(6.74) 的表示，为此需要研究离散 Radon 变换的实现问题。这个问题较为复杂，这里不再予以介绍。

6.7.3　单尺度脊波和曲波

从前面的论述已经知道，脊波变换在处理直线型奇异性时独具优势。但当奇异性为曲线型时，脊波变换将遇到麻烦。为了处理曲线型奇异性问题，E. J. Candes 和 D. L. Donoho 又提出了曲波(Curvelet) 变换。

对于含有曲线型奇异性的图像，可将其均匀分割为许多正方形的子区域，在包含曲线的各子区域中，曲线可以近似地看做直线。选取恰当的尺度，再在各子区域上作脊波变换。这种需要选取特定尺度且在各子区域上进行脊波变换的方法，称为单尺度脊波变换或局部脊波变换。

曲波变换，本质上就是多尺度局部脊波变换，即先将图像用小波变换分解成不同尺度的子带图像，然后将各子带图像光滑分割成若干子块(子块的大小由具体情况而定)，接着对含有曲线的各子块作局部脊波变换。

上面仅对曲波变换作了一个简单的解释和给出大体步骤。关于脊波或曲波变换的应用这里也不再举例说明。对它们感兴趣的读者请参阅本节前面所列的文献。

脊波理论和有关算法目前还不成熟，尤其对于包含不同类型奇异性的自然图像和高维函数，还有许多问题需要解决。正因为如此，脊波理论和应用已成为人们研究和关注的一个热点。

参考文献

[1] 崔锦泰．小波分析导论．程正光，译．西安：西安交通大学出版社，1995.

[2] 秦前清，杨宗凯．实用小波分析．西安：西安电子科技大学出版社，1994.

[3] 程正兴．小波分析算法与应用．西安：西安交通大学出版社，1998.

[4] Mallat S. 信号处理的小波导引．杨力华，戴道清，黄文良，等译．北京：机械工业出版社，2002.

[5] 冯象初，甘小冰，宋国乡．数值泛函与小波理论．西安：西安电子科技大学出版社，2003.

[6] Daubechies I. Ten Lectures on Wavelets, CBMS－Conference Lecture Notes: Vol. 61. Philadelphia: SIAM, 1992.

[7] 唐远炎，王玲．小波分析与文本文字识别．北京：科学出版社，2004.

[8] 李水根，吴纪桃．分形与小波．北京：科学出版社，2002.

[9] 成礼智，王红霞，罗永．小波的理论与应用．北京：科学出版社，2004.

[10] Ingrid Daubechies. 小波十讲．李建平，杨万年，译．北京：国防工业出版社，2004.

[11] Mallat S. A theory for multiresolution signal decomposition: the Wavelet representation[J]. IEEE Trans, 1989, 11(7): 674－693.

[12] 徐晨，赵瑞珍，甘小冰．小波分析・应用算法．北京：科学出版社，2004

[13] 刘贵忠，邸双亮．小波分析及其应用．西安：西安电子科技大学出版社，1995.

[14] 迈耶 Y. 小波与算子：小波．第 1 卷．尤众，译．北京：世界图书出版公司，1992.

[15] Brenner G, Scott R. The mathematical theory of finite element methods [M]. 北京：世界图书出版公司，1998.

[16] 龙瑞麟．高维小波分析[M]. 北京：世界图书出版公司，1995.

[17] Glowinski R, Rieder A, Wells R O, et al. A wavelet multilevel method for Dirichlet boundary value problems in general domains[J]. Technical Report 93－06. Houston: Rice University, 1993.

[18] Bacry E, Mallat S, Papanicolaou G. A wawelet based space－time adaptive numerical method for partial differential equations[J]. Technical Report No591, Robotics Report No257; New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, 1991.

[19] Candes E J. Ridgelets: Theory and Application // Ph. D. Thesis, Technical Report, Department of Statistics. Stanford: Stanford University, 1998.

[20] Candes E J, Donoho D L. Curvelet——A surprisingly effective nonadaptive representation for objects with edges[A] //Cohen A, Rabut C, Schumaker L L. in Curve and Surface Fitting: Saint - Molo 1999[C]. Nashville, TN: Van - derbit Univ. Press, 1999.

[21] 焦李成,谭山,刘芳. 脊波理论:从脊波变换到 Curvelet 变换[J]. 工程数学学报, 2005,22(5).